

Chapitre 3

Transmission numérique sur fréquence porteuse

I. Modulations numériques sur fréquence porteuse

I.1 INTRODUCTION

I.1.1. Transmission numérique en bande de base ou sur fréquence porteuse ?

La *modulation numérique* est l'application qui fait correspondre à une suite de symboles numériques (bits issus de la source B) un *signal continu (réel) $x(t)$* capable de traverser le canal de transmission, que l'on appelle signal modulé (par un message numérique). Cette définition se détache de celle de la modulation analogique, et on pourra distinguer :

- Transmission en bande de base : $x(t)$ est un signal réel de type *passé-bas*, de spectre mono-latéral (c'est à dire si on ne parle que des fréquences positives) démarrant à **0Hz** (bande mono-latérale $[0 ; B]$ ou bande bilatérale $[-B ; B]$),
- modulation sur fréquence porteuse : $x(t)$ est un signal réel *passé-bande* autour d'une fréquence porteuse f_0 , (bande mono-latérale $[f_0 - \Delta f_1 ; f_0 + \Delta f_2]$), avec $B = \Delta f_2 + \Delta f_1 \ll f_0$.

La transmission en bande de base peut-être précieuse, étant donné sa simplicité de mise en œuvre, par exemple pour des liaisons courtes par câbles. Elle peut aussi être un préalable à l'opération de modulation d'une porteuse, qui vise à transposer le support fréquentiel du signal en bande de base dans la bande passante du canal (dans ce cas on pourra transposer dans la même bande 2 signaux en bande de base !). Un bref rappel de « modulation » en bande de base, vu en 1^o année, se trouve en annexe. Nous allons traiter dans la suite uniquement les modulations sur fréquence porteuse.

I.1.2. Forme générale d'une modulation numérique sur fréquence porteuse :

L'opération de modulation numérique peut (au moins formellement) se décomposer en une opération de « construction des composantes en Bande de Base du signal modulé » (qui dépend du format de la modulation) suivie d'une opération universelle de transposition autour de la Fréquence Porteuse désirée, appelée « Modulation I/Q ».

Modulation I/Q :

Le signal modulé $x(t)$ étant un signal réel passe-bande de largeur B autour d'une fréquence porteuse f_0 , il peut toujours s'écrire (et être construit), en tant que signal à bande étroite ($B \ll f_0$) :

$$x(t) = x_I(t)\cos(2\pi f_0 t) + x_Q(t)\cos(2\pi f_0 t + \pi/2) \quad (1)$$

où $x_I(t)$, et $x_Q(t)$ sont deux signaux réels en bande de base (de type passe-bas, bande monolatérale $[0 ; B/2]$) appelés respectivement voies **en phase (I, « In phase »)** et **en quadrature (Q)** car ils modulent respectivement la porteuse « $\cos(2\pi f_0 t)$ » et la porteuse en quadrature « $\cos(2\pi f_0 t + \pi/2)$ ».

On parle de « modulation I/Q » pour désigner le passage des composantes $\{x_I(t), x_Q(t)\}$ au signal en bande portée $x(t)$. Cette opération correspond à une « transposition de fréquence » universelle, qui concerne aussi bien les modulations analogiques que numériques. Dans le cas d'une modulation numérique, le signal *analogique* $x(t)$ véhicule des informations numériques, qui sont distinctes à travers $x_I(t)$ d'une part, et $x_Q(t)$ d'autre part. Il sera commode de représenter cette double dimension à partir d'un signal complexe passe-bas :

$$\tilde{x}(t) = x_I(t) + j.x_Q(t)$$

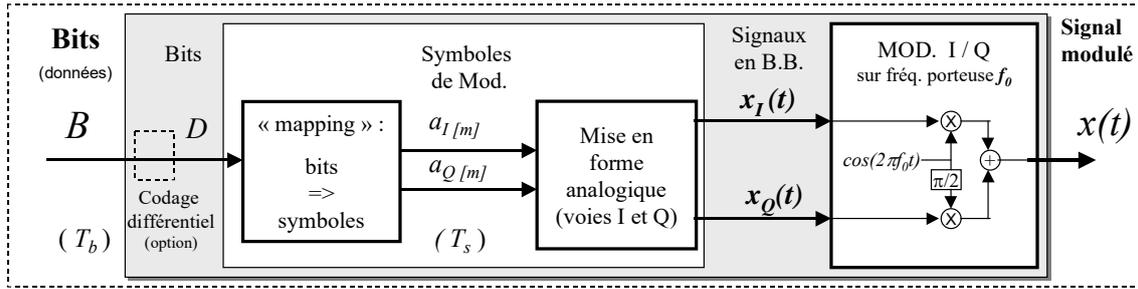


Figure 3.1.1 : modulation numérique sur fréquence porteuse (avec symboles de modulation intermédiaires)

Construction des composantes en Bande de Base du signal modulé :

- **Correspondance** : une correspondance est établie entre les blocs de n bits entrants (D) et $M = 2^n$ formes d'ondes analogiques complexes, indicées de $i = 0$ à $M-1$, et notées $\tilde{x}^i(t) = x_I^i(t) + j \cdot x_Q^i(t)$
- **Rapidité de modulation** : $R = 1/T_s$, exprimée en bauds ou symbole/seconde. L'enveloppe complexe $\tilde{x}(t)$ du signal modulé est construite à partir de l'émission tous les temps symboles, aux instants $m \cdot T_s$, ($m \in \mathbb{Z}$) d'un signal $\tilde{x}^{i_m}(t)$ choisi parmi les M possibles (selon le bloc de n bits à transmettre) :

$$\tilde{x}(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \tilde{x}^{i_m}(t - mT_s) \quad ; \quad i_m \in \{0, 1, \dots, M-1\}$$

- **Modulation sans ou avec mémoire** : lorsque la forme d'onde $\tilde{x}^{i_m}(t)$ à transmettre à l'instant $m \cdot T_s$ dépend du bloc de n bits (D) courants seulement (et non aussi d'un ou de plusieurs blocs précédents), on dit que la modulation est sans mémoire. Dans ce cas, on a une correspondance bijective entre les $M = 2^n$ blocs de n bits possibles, et les M formes d'ondes complexes $\tilde{x}^i(t)$.

La procédure décrite ci-dessus est la plus générale pour définir une modulation de rapidité R . Dans la grande majorité des modulations, on a une étape intermédiaire (Cf fig 3.1.1 et 3.1.2) entre le bloc de n bits et le signal complexe $\tilde{x}^i(t)$:

- **Étiquetage (« mapping »)** : opération intermédiaire de passage « bits => symboles ». Chaque bloc de n bits (D) est d'abord associé à un symbole de modulation \tilde{a}^i , à valeur numérique complexe (= $a^i + j \cdot a^j$) prise dans un alphabet A_{mod} de taille M , à transmettre donc au rythme de R symbole par seconde. Si de plus la modulation est sans mémoire, on a alors les correspondances bijectives :

$$\text{blocs de } n \text{ bits } n^{\circ} \{ \langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle, \dots, \langle M-1 \rangle \} \Leftrightarrow A_{\text{mod}} = \{ \tilde{a}^0, \tilde{a}^1, \dots, \tilde{a}^{M-1} \} \in \mathbb{C}^M \Leftrightarrow \{ \tilde{x}^0(t), \tilde{x}^1(t), \dots, \tilde{x}^{M-1}(t) \}$$

- **Modulation Linéaire ou non linéaire** : si la forme d'onde s'exprime comme une fonction F (réelle ou complexe) du symbole numérique de même indice, soit $\tilde{x}^i(t) = F\{\tilde{a}^i\}$, et que F est linéaire, on dit que la modulation est linéaire. Les modulations d'amplitude ou de phase entrent dans cette catégorie, mais pas les modulation de fréquence (on a seulement $\tilde{x}^i(t) = F_1\{\exp(jF_2\{a^i\})\}$, avec F_1 et F_2 linéaires).

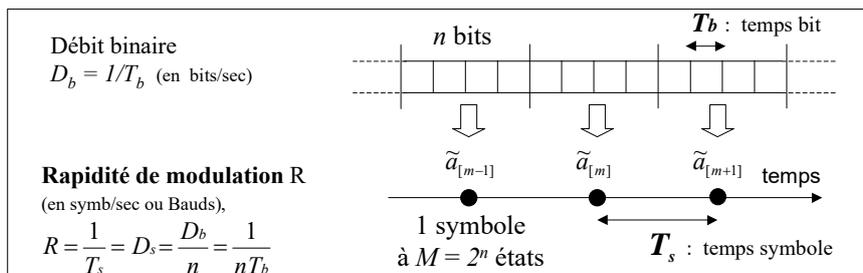


Figure 3.1.2 : Changement de rythme dans l'opération de passage des bits aux symboles de modulation .

Energie par bit du signal modulé, E_b :

Pour étudier et comparer les modulations, une grandeur fondamentale est l'*Energie* dépensée *en moyenne* pour transmettre *un bit*, désignée par E_b . Pour une transmission sur fréquence porteuse, E_b , est toujours relative au signal modulé *en bande portée*. En général on a besoin d'évaluer E_b en entrée du récepteur, c'est à dire après transmission dans le canal de propagation, mais celui-ci étant supposé ici de gain unitaire, on s'intéresse à l'énergie moyenne par bit du signal modulé en bande portée $x(t)$ à l'émission, soit $E_b = E_b(x)$.

- De manière *pratique*, E_b est accessible à la mesure, puisqu'il suffit de mesurer au wattmètre la puissance moyenne P du signal modulé $x(t)$, et d'utiliser la relation $E_b = P \cdot T_b$, où $T_b = 1/D_b$ est le temps bit.
- De manière *théorique*, l'expression de E_b peut s'obtenir à partir de l'expression de $x(t)$, comme nous le verrons plus précisément en I.3 et I.4. Ceci nécessitera quelques précautions, car le signal $x(t)$ est considéré comme un signal aléatoire, étant donné qu'il est construit à partir des symboles à transmettre qui sont eux mêmes aléatoires et de plus stationnaires.

Précision Annexe générale sur l'évaluation de E_b :

- pour 1 réalisation du signal $x(t)$ supposé à puissance moyenne finie durant la transmission de K symboles, on a :

$$E_{b_lreal} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{K} \int_{t_0}^{t_0+KTs} x(t)^2 dt, \text{ où on rappelle que } n = lb(M) \text{ est le nombre de bits par symbole.}$$

- pour obtenir une valeur moyenne statistique, il suffit *en théorie* d'effectuer une moyenne statistique sur les

$$\text{réalisations de } x(t) \text{ (donc sur les réalisations des symboles) : } E_b = E\{E_{b_lreal}\} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{K} \int_{t_0}^{t_0+KTs} E\{x(t)^2\} dt$$

En pratique, la mesure physique de E_b correspond en réalité à celle de E_{b_lreal} mais pour un temps de mesure grand

$$(K \rightarrow \infty), \text{ ce qui donne une bonne approximation de } E_b, \text{ soit : } E_b \approx T_b \cdot \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t)^2 dt$$

Avant de présenter les modulations linéaires et la modulation de fréquence, nous allons rappeler quelques propriétés des signaux à bande-étroite et de leur représentation à l'aide des signaux complexes.

I.2 RAPPEL PROPRIETES ET REPRESENTATION DES SIGNAUX REELS A BANDE ETROITE A L'AIDE DES SIGNAUX COMPLEXES (Cf cours et TD Traitement du Signal)

(la notation \sim désigne dans le cours un signal complexe de type passe-bas, ou un symbole discret complexe).

I.2.1) Représentation du signal modulé I/O à l'aide de l'Enveloppe complexe :

• Relations générales (coordonnées cartésiennes)

L'étude des procédés de modulation sera facilitée par l'emploi de l'enveloppe complexe $\tilde{x}(t)$ (signal passe-bas, bande bilatérale $[-B/2, B/2]$) relative à la fréquence f_0 (ou la phase « $2\pi f_0 t$ »), du signal passe-bande $x(t)$, qui peut alors s'exprimer de manière équivalente à (1) par :

$$x(t) = \text{Re} \left\{ \tilde{x}(t) \cdot e^{j2\pi f_0 t} \right\} \quad (3)$$

avec : $\tilde{x}(t) = x_I(t) + j \cdot x_Q(t)$

$\tilde{x}(t)$ est aussi appelé équivalent complexe en bande de base de $x(t)$; c'est un signal fictif (introduit pour les facilités de représentation et de calcul) qui regroupe dans un signal complexe les deux composantes en bande de base réelles, en phase $x_I(t)$ et en quadrature $x_Q(t)$.

En raisonnant toujours avec les signaux complexes, la transposition de $\tilde{x}(t)$ autour de $+f_0$ (seulement du côté des fréquences positives) correspond au signal analytique $z_x(t)$ de $x(t)$:

$$\text{signal analytique de } x : \quad z_x(t) = \tilde{x}(t) \cdot e^{j2\pi f_0 t} \quad (4)$$
$$x(t) = \text{Re}\{z_x(t)\}$$

Formellement, le signal réel $x(t)$ est alors obtenu en prenant la partie réelle de $z_x(t)$, ce qui fait « naître » la partie des fréquences négatives du spectre (pour un signal réel $x(t)$ tel que $X(f) = TF\{x(t)\}$, on a $X(-f) = X^*(f)$).

Annexes : Relations en fréquence pour $\tilde{X}(f), \tilde{Z}_x(f), X(f), X_I(f), X_Q(f)$ (respectivement T.F. de $\tilde{x}(t), z_x(t), x(t), x_I(t), x_Q(t)$), déduites de (1), (3) et (4), Cf figure 3.1.3 :

$$\tilde{Z}_x(f) = \tilde{X}(f - f_0) \quad \text{et} \quad X(f) = X^+(f) + X^-(f) \quad \text{avec} \quad X^+(f) = \frac{1}{2} \tilde{X}(f - f_0) \quad \text{et} \quad X^-(f) = \frac{1}{2} \tilde{X}^*(-f - f_0)$$

dernière relation démontrée : en utilisant $x(t)$ réel $\Rightarrow X^*(-f) = X(f)$

ou bien développement de $X(f) = \frac{1}{2} \{X_I(f - f_0) + X_I(f + f_0)\} + \frac{j}{2} \{X_Q(f - f_0) - X_Q(f + f_0)\}$

avec : $X^+(f) = \frac{1}{2} \{X_I(f - f_0) + jX_Q(f - f_0)\}$ (partie de $X(f)$ en fréquences positives);

$X^-(f) = \frac{1}{2} \{X_I(f + f_0) - jX_Q(f + f_0)\}$ (partie de $X(f)$ en fréquences négatives);

avec $\tilde{X}(f) = X_I(f) + jX_Q(f)$ et $X_I^*(-f) = X_I(f)$; $X_Q^*(-f) = X_Q(f)$ (car $x_I(t), x_Q(t)$ réels)

• **Cas d'un signal réel bande-étroite quelconque :**

Le signal modulé I/Q autour de la fréquence porteuse f_0 a été construit selon (1) ou (3), à partir de la donnée de $x_I(t)$ et de $x_Q(t)$. En fait, il est important de noter que tous les signaux réels $x(t)$ à bande-étroite, c'est à dire de type passe-bande autour de f_0 (avec largeur de bande $B \ll f_0$), peuvent également être décrit à partir de 2 composantes réelles $\{x_I(t), x_Q(t)\}$ de type passe-bas et du choix d'une fréquence f_0 appartenant au support spectral de x , selon (1) ou (3). Notons (Cf figure 3.1.3) que pour un signal bande-étroite donné $x(t)$, le signal analytique associé, $z_x(t)$, est unique, alors que l'enveloppe complexe $\tilde{x}'(t)$ extraite (par démodulation I/Q et filtrage passe-bas, Cf 1.2.2) dépend du choix de f_0 (et de la phase ϕ_{RX} si la phase utilisée pour la démodulation est « $2\pi f_0 t + \phi_{RX}$ », donnant $\tilde{x}'(t) = z_x(t) \cdot e^{-j\{2\pi f_0 t + \phi_{RX}\}}$).

L'obtention du signal analytique $z_x(t)$ associé à un signal réel bande-étroite quelconque $x(t)$ peut se faire :

- à partir de la **définition du signal analytique** en fréquence : $\tilde{Z}_x(f) = \begin{cases} 2X(f) & \text{si } f > 0 \\ 0 & \text{pour } f < 0 \end{cases}$
- à partir d'un filtre de Hilbert (Cf Cours de TS : $z_x(t) = x(t) + j \cdot H_q\{x\}(t)$, où $H_q\{x\}$ est obtenu par filtrage de x (la fonction de transfert du filtre de Hilbert étant : $H_q(f) = -j \cdot \text{sgn}(f)$),
- **plus simplement**, si l'expression du signal réel $x(t)$ est connue, **de la forme $x(t) = A(t)\cos(\omega_0 t + \phi(t))$ on a directement $z_x(t) = A(t) \exp(j(\omega_0 t + \phi(t)))$** , du moment que $A(t)$ et $\phi(t)$ sont de type passe-bas, de bande $\ll f_0$.

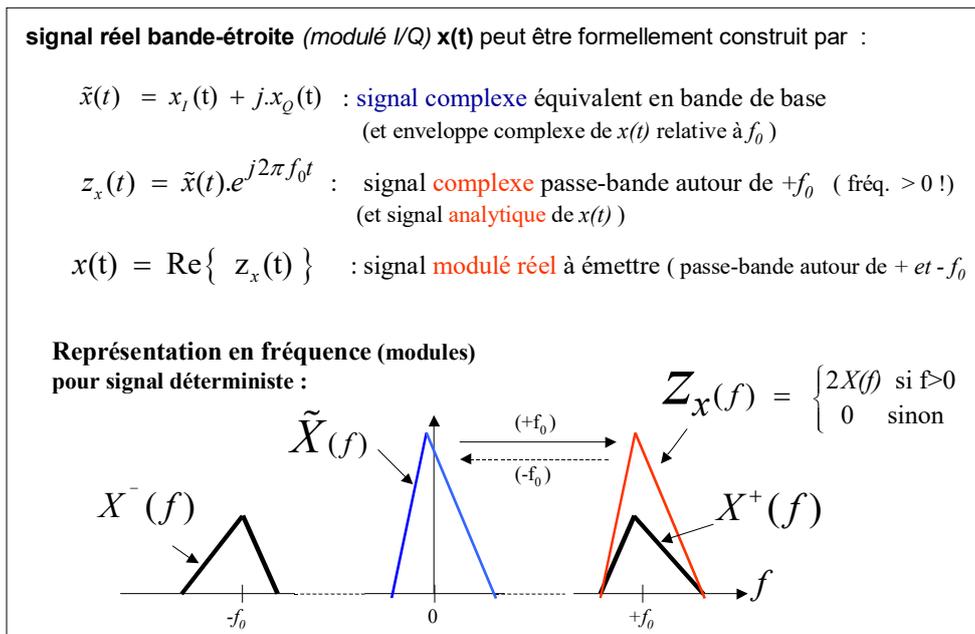


figure 3.1.3 : représentation en fréquence (modules) d'un signal réel bande étroite $x(t)$, du signal analytique (complexe) associé $z_x(t)$, et de son enveloppe complexe $\tilde{x}(t)$ relative à f_0 (signal équivalent en bande de base).

- **Représentation en coordonnées polaires** : une expression équivalente du signal bande-étroite est donnée avec la représentation par enveloppe et phase, qui fait apparaître la modulation d'amplitude et de phase de la porteuse:

$$x(t) = A(t) \cdot \cos\{2\pi f_0 t + \phi(t)\}$$

$$\text{avec } A(t) \cdot \exp\{j\phi(t)\} = \tilde{x}(t)$$

$$\text{soit : } A(t) = \sqrt{x_I^2(t) + x_Q^2(t)}, \quad \tan\phi(t) = \frac{x_Q(t)}{x_I(t)}$$

Où $A(t)$: enveloppe instantanée (ou module), $\psi(t) = 2\pi f_0 t + \phi(t)$: phase instantanée, et $\phi(t)$: écart de phase

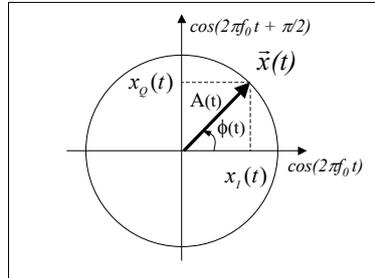


figure 3.1.4 : Représentation de Fresnel par enveloppe et écart de phase (relatifs à f_0) de la porteuse modulée $x(t)$.

- **Relations entre les Densités Spectrales de Puissance (DSP)**

La DSP du signal réel passe-bande $x(t)$ se déduit de celle de l'enveloppe complexe :

$$\Gamma_x(f) = \frac{1}{4} \Gamma_{\tilde{x}}(f - f_0) + \frac{1}{4} \Gamma_{\tilde{x}}(-f - f_0)$$

On remarque que la dsp $\Gamma_{\tilde{x}}(f)$ de l'enveloppe complexe n'est pas paire, car $\tilde{x}(t)$ et donc la fonction d'auto-corrélation $\gamma_{\tilde{x}}(\tau, t) = E\{x(t) \cdot x^*(t - \tau)\}$ sont complexes (on a pour $\tilde{x}(t)$ stationnaire : $\Gamma_{\tilde{x}}(f) = TF\{\gamma_{\tilde{x}}(\tau)\}$).

La puissance moyenne du signal bande-étroite est la moitié de celle de son enveloppe complexe : $P(x) = \frac{1}{2} P(\tilde{x})$.

1.2.2) Extraction des composantes en quadrature, Démodulation I/Q :

Le signal $x(t)$ véhicule des informations distinctes à travers $x_I(t)$ d'une part, et $x_Q(t)$ d'autre part. Ce « mélange » de deux informations dans la même bande du signal passe-bande (avec $B \ll f_0$) est en effet parfaitement possible. Il n'y a aucun problème pour récupérer séparément les composantes $x_I(t)$ et $x_Q(t)$ à la réception à partir de $x(t)$. Cela se fait en pratique par démodulation I/Q (avec la porteuse et la porteuse en quadrature) et filtrage passe-bas ou plus formellement à partir de l'extraction du signal analytique et transposition directe sans filtrage passe-bas (en accord avec la figure 3.1.3) comme schématisé sur la figure 3.1.5.

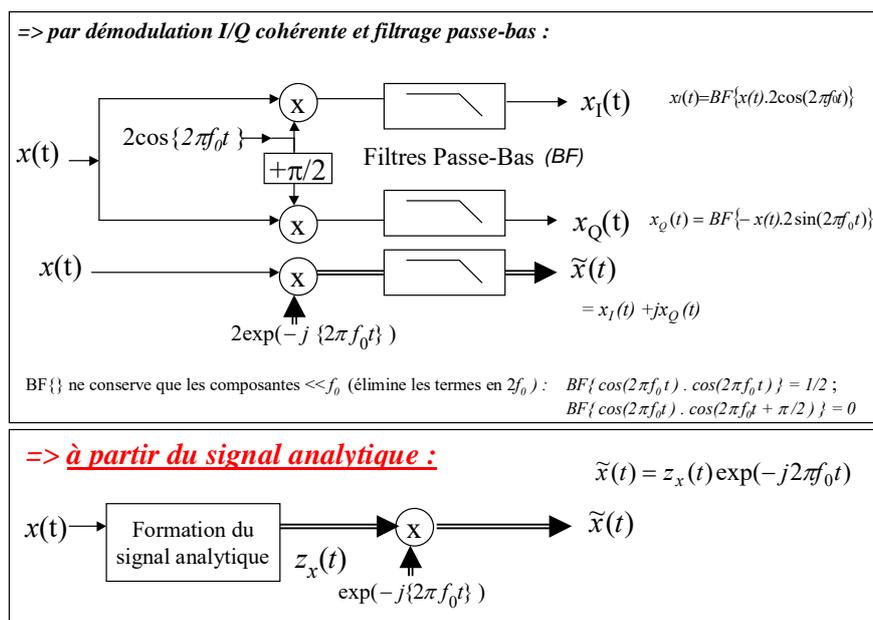


figure 3.1.5 : Restitution des composantes en quadrature (relatives à f_0) du signal bande-étroite.

Démodulation I/Q avec phase non nulle d'un signal quelconque $r(t)$ réel à bande-étroite autour de f_0 :

les composantes en bande de base $\tilde{r}(t) = r_I(t) + j.r_Q(t)$ obtenue par démodulation I/Q de $r(t)$ avec un oscillateur de référence de phase « $2\pi f_0 t + \phi_{RX}$ », c'est à dire $\tilde{r}(t) = BF\{ r(t).2e^{-j\{2\pi f_0 t + \phi_{RX}\}} \}$, peuvent se calculer à partir du signal analytique $z_r(t)$ de $r(t)$ par :

$$\tilde{r}(t) = z_r(t) \cdot e^{-j\{2\pi f_0 t + \phi_{RX}\}} \tag{4bis}$$

exercice : faire la démonstration.

Note : Intérêt de l'utilisation du signal analytique :

1) Le calcul des expressions des composantes démodulées à partir du signal analytique (équation 4bis) est généralement beaucoup plus simple que d'effectuer le calcul à partir du signal réel $r(t)$.

2) Les transformations linéaires qui affectent le signal réel $x(t)$ affectent de la même manière le signal analytique. En raisonnant à partir du signal analytique à la place du signal réel, on exprime facilement l'équivalent complexe en bande de base en réception $\tilde{r}(t)$ en fonction de celui d'émission $\tilde{x}(t)$, en présence de différentes imperfections (déphasage ou écart de fréquence entre oscillateurs porteuses émission et réception, filtrage du canal, ...).

Exemple : effet d'un retard de propagation $\Delta\tau$:

- $r(t) = x(t - \Delta\tau) \Rightarrow$ signal analytique : $z_r(t) = z_x(t - \Delta\tau)$ d'où $z_r(t) = \tilde{x}(t - \Delta\tau).e^{j2\pi f_0(t - \Delta\tau)}$
- Equivalent complexe en bande de base après démodulation I/Q avec la référence de phase « $2\pi f_0 t$ » :
 $\Leftrightarrow \tilde{r}(t) = z_r(t).e^{-j2\pi f_0 t}$ d'où : $\tilde{r}(t) = \tilde{x}(t - \Delta\tau).e^{-j2\pi f_0 \Delta\tau}$

Le retard introduit sur le signal en bande portée entraîne donc un retard sur les composantes en bande de base, ainsi qu'une rotation de phase de $-2\pi f_0 \Delta\tau$. Celle ci pourrait être compensée en ajustant la phase de démodulation.

I.2.3) Cas du bruit blanc :

A partir des relations entre les DSP (ou fig 3.1.3), on vérifie que pour un bruit blanc réel $n(t)$ de DSP bilatérale $N_0/2$ autour de f_0 (dans une bande B), l'équivalent complexe en bande de base $\tilde{n}(t) = n_I(t) + j.n_Q(t)$ a pour DSP bi. $2N_0$, et chacune des composantes en quadrature, $n_I(t)$ et $n_Q(t)$, ont pour DSP bi. N_0 .

De plus, on montre que si $n(t)$ est gaussien, les composantes $n_I(t)$ et $n_Q(t)$ sont gaussiennes et indépendantes.

Annexe I.2.4: transformation par filtrage des signaux à bande-étroite :

Soit un signal réel passe-bande $x(t)$ subissant une opération de filtrage linéaire. La sortie $r(t)$ est obtenue par l'équation de convolution $r(t) = (h_{HF} * x)(t)$, soit par Transformée de Fourier : $R(f) = H_{HF}(f).X(f)$, où $h_{HF}(t)$ est la R.I. du filtre. L'enveloppe complexe de $r(t)$ peut s'obtenir par filtrage de l'enveloppe complexe de $x(t)$ par un filtre de R.I. complexe en bande de base $\tilde{h}_{PB}(t)$, dont la fonction de transfert (obtenue par TF de $\tilde{h}_{PB}(t)$) est donnée par $\tilde{H}_{PB}(f) = H(f + f_0)$, pour $f \in [-f_0; +f_0]$. L'exemple de l'effet du retard de propagation en I.2.2, correspond au cas particulier $h_{HF}(t) = \delta(t - \Delta\tau)$, qui a permis d'obtenir $h_{PB}(t) = \delta(t - \Delta\tau).exp(-j2\pi f_0 \Delta\tau)$.

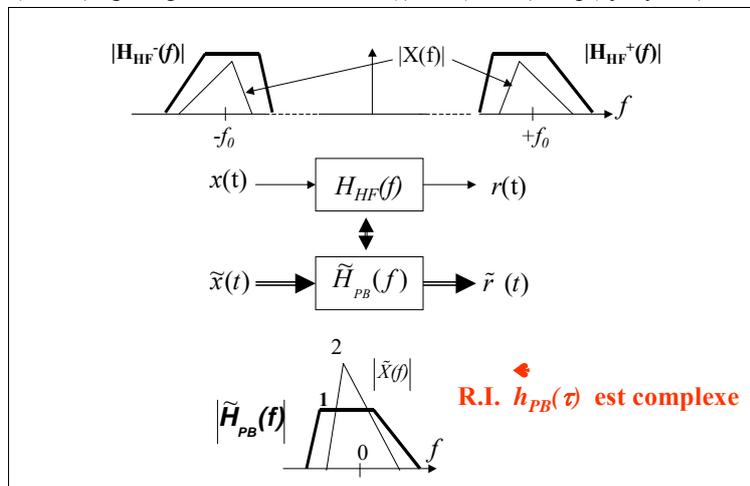


figure annexe 3.1.6 : filtrage équivalent en bande de base (R.I. complexe).

I.3 MODULATIONS LINEAIRES

I.3.1. Modèle mathématique d'une modulation linéaire (de base) sans mémoire :

A) Expression générale :

Soit « ..., $\tilde{a}_{[m-1]}, \tilde{a}_{[m]}, \tilde{a}_{[m+1]}, \dots$ » les symboles successifs à transmettre aux instants « ..., $(m-1)T_s, mT_s, (m+1)T_s, \dots$ », où les différents $\tilde{a}_{[m]} = a_{I[m]} + j.a_{Q[m]} \in A_{mod}$ et $m \in \mathbb{Z}$, on obtient le modèle mathématique suivant pour $x(t)$ construit avec une modulation linéaire (de base) :

$$x(t) = x_I(t)\cos(2\pi f_0 t) + x_Q(t)\cos(2\pi f_0 t + \pi/2)$$

avec : $x_I(t) = T_s \cdot \sum_m a_{I[m]} \cdot h_e^{(I)}(t - mT_s)$ et $x_Q(t) = T_s \cdot \sum_m a_{Q[m]} \cdot h_e^{(Q)}(t - mT_s)$ (5)

$h_e^{(I)}, h_e^{(Q)}$: R.I. réelles des filtres de mise en forme des symboles, ou impulsions élémentaires (de type passe-bas, bande m. $[0, B/2]$, avec $B \ll f_0$)

Dans la plupart des cas, les filtres de mise en forme de la voie I et de la voie Q sont identiques :

$$h_e^{(I)}(\tau) = h_e^{(Q)}(\tau) = h_e(\tau)$$

Ainsi pour une modulation linéaire sans mémoire de base, les signaux $\{\tilde{x}^i(t)\}$ (Cf introduction, I.1) s'expriment en fonction d'une forme d'onde élémentaire $\tilde{x}_e(t)$ unique : $\tilde{x}^i(t) = \tilde{a}^i \cdot \tilde{x}_e(t)$; $i = 0, 1, \dots, M-1$; $\tilde{a}^i \in A_{mod}$

Pour obtenir une dimension de filtre (Cf commentaire annexes en fin de partie I.3.1), nous avons introduit la fonction $h_e(t)$ égale à $x_e(t)$ à un facteur multiplicatif T_s près, tel que : $x_e(t) = T_s \cdot h_e(t)$

Exemple : $x_I(t)$, et $x_Q(t)$ sont des signaux en bande de base au format NRZ binaire, avec donc : $a_{I[m]}, a_{Q[m]} \in \{-A, +A\}$ et la forme d'onde $T_s \cdot h_e(\tau) = Rect_{[0, T_s]}(\tau)$;

L'enveloppe complexe d'un signal modulé linéairement est donc une fonction linéaire des symboles complexes $\tilde{a}_{[m]}$:

$$\tilde{x}(t) = T_s \cdot \sum_m \tilde{a}_{[m]} \cdot h_e(t - mT_s) \quad \text{avec} \quad \tilde{a}_{[m]} = a_{I[m]} + j.a_{Q[m]} \quad (6)$$

L'impulsion élémentaire $h_e(\tau)$ peut-être effectivement interprété comme un filtre appliqué au « train impulsif des symboles », $\tilde{a}(t)$, pour mettre en forme les symboles, selon la relation de convolution :

$$\tilde{x}(t) = (h_e * \tilde{a})(t) \quad \text{avec} \quad \tilde{a}(t) = T_s \cdot \sum_m \tilde{a}_{[m]} \cdot \delta(t - mT_s)$$

Le signal (distribution) $\tilde{a}(t)$ n'a pas de réalité physique, mais peut-être vu comme la source de symboles « mis en forme » par des diracs $\{\dots, \delta(t), \delta(t-T_s), \delta(t-2T_s), \dots\}$, avant d'être mis en forme par $\{\dots, h_e(t), h_e(t-T_s), h_e(t-2T_s), \dots\}$.

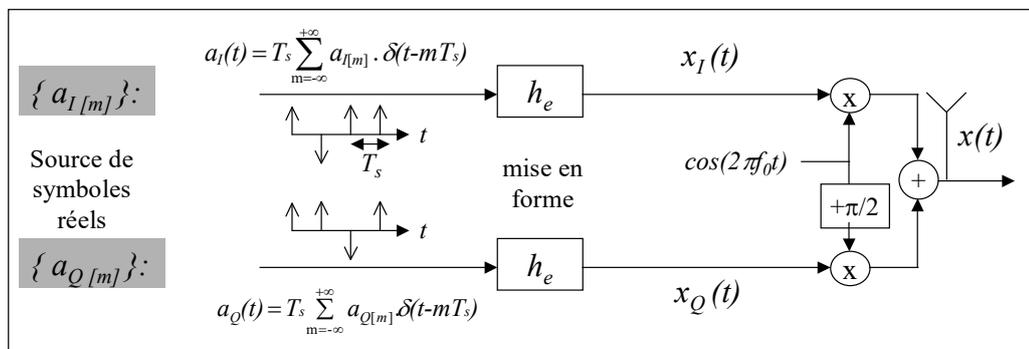


figure 3.1.7 : représentation d'une modulation numérique linéaire sur porteuse f_0 .

Note : l'emploi de cette écriture convolutive pour $\tilde{x}(t)$ est souvent très intéressante lors de manipulations mathématiques, en particulier lorsque le signal subit divers filtrages dans la chaîne.

Par exemple, si $x(t)$ est filtré par un canal de R.I. $h(\tau)$, on aura pour la représentation équivalente en bande de base :

$$\tilde{r}_0(t) = (\tilde{h}_{PB} * \tilde{x})(t) = (\tilde{h}_{PB} * h_e * \tilde{a})(t) = (\tilde{g} * \tilde{a})(t)$$

où $\tilde{g}(\tau) = (\tilde{h}_{PB} * h_e)(\tau)$: forme d'onde globale. On en déduit : $\tilde{r}_0(t) = T_s \cdot \sum_m \tilde{a}_{[m]} \cdot \tilde{g}(t - mT_s)$

Note annexe 1, Commentaires sur les dimensions

Conventions physiques adoptées dans le cours : Les signaux analogiques ($x(t)$, $r(t)$) et discrets ($a_{[m]}$, $r_{[m]}$) ont pour dimensions des amplitudes (ex : Volt), et leur densité spectrale de puissance a la dimension de V^2/Hz . L'opération de filtrage ne devant pas changer les dimensions entre l'entrée et la sortie, les réponses impulsionnelles des filtres analogiques ($h(\tau)$) sont homogène à des Hz ($r(t) = \int h(\tau)x(t-\tau)d\tau$), les R.I. des filtres discrets ($g_{[m]}$) sont sans dimension ($r_{[m]} = \sum g_{[n]} a_{[m-n]}$). On vérifie que les fonctions de transfert des filtres analogiques ($H(f) = \int h(\tau)\exp(-j2\pi f\tau)d\tau$) sont sans dimension ($H(f) = R(f) / X(f)$), de même que pour les filtres discrets ($G^{ech}(f) = \sum g_{[n]} \exp(-j2\pi n f T_e)$, T_e : pas d'échantillonnage).

Ces conventions expliquent l'introduction du T_s dans le modèle mathématique de $x(t)$, si on veut que $h_e(\tau)$ ait la dimension d'un filtre, et que les symboles $a_{[m]}$ aient une dimension de Volt.

Dans la plupart des livres : le T_s n'apparaît pas dans l'écriture de $x(t)$. Cela revient à remplacer $T_s \cdot h_e(t)$ par la forme d'onde $x_e(t)$ qui est sans dimension (ou aurait la dimension d'un signal en volt si les symboles étaient par convention sans dimension), alors que $h_e(t)$ a la dimension d'un filtre (Hz). Quelque-soit la normalisation utilisée, les expressions des performances (Probabilité d'erreur, Rapport Signal à bruit sur la variable de décision, ...) en fonction du rapport « signal à bruit par bit » à l'entrée du récepteur (rapport E_b/N_0) restent les mêmes.

Note annexe 2 : extension des modulation linéaires de base

- Impulsions de mise en forme complexe : l'expression (6) de la modulation linéaire de base peut être étendu au cas où l'impulsion de mise en forme $h_e(t)$ est une R.I. complexe : ainsi le signal $x_I(t)$ (idem $x_Q(t)$) est construit à partir de la mise en forme des symboles à la fois des voies I et Q.
- Modulation « multi-dimensionnelle » ou « multi-voie » : l'expression (6) est propre en réalité aux modulations linéaires de base à une dimension (voie I seulement) ou deux dimensions (voies I et Q utilisées). Elle peut être facilement étendue à un nombre supérieur de dimensions, en sommant en parallèle K voies de symboles complexes, mis en forme par K impulsions $h_e^{(k)}(t)$ différentes sur chaque voie. Exemples :
 - **Modulation à porteuses multiples orthogonales « OFDM »** (Orthogonal Frequency Division Multiplexing), utilisée dans l'ADSL, le WIFI, le DVB, ... : les impulsions de mise en forme sont les exponentielles complexes $\{ \exp(j2\pi \Delta f_k t), k=-K/2, \dots, -1, 0, 1, K/2 - 1 \}$, limitées à une durée T_s . Elles peuvent être interprétées comme des sous-porteuses de fréquences $f_k = k \cdot \Delta f$, dont l'orthogonalité (produit scalaire nul) est garanti pour un espacement entre sous-porteuse $\Delta f = 1/T_s$.
 - **Accès multiple à répartition par codes « CDMA »** (Coded Division Multiplex Access) utilisé dans l'UMTS, le GPS, ... : les impulsions de mise en forme de K utilisateurs sont construites à l'aide de K codes, chacun constitué de Q éléments binaires répartis sur la durée T_s . Le débit des éléments de code étant Q fois supérieur au débit symbole $1/T_s$, cela peut occasionner un élargissement (ou étalement) de spectre d'un facteur Q.

B) Calcul de E_b en tenant compte de la cyclo-stationnarité de $x(t)$ pour une modulation linéaire :

L'enveloppe complexe $\tilde{x}(t)$ issu d'une modulation linéaire n'est généralement pas stationnaire à l'ordre 2, mais seulement cyclo-stationnaire, comme établi en annexe I.3.a. Cela signifie que la valeur moyenne $E\{\tilde{x}(t)\}$ et la fonction de corrélation $E\{\tilde{x}(t) \cdot \tilde{x}(t-\tau)\}$ dépendent de l'instant t , mais de manière périodique, de période T_s (pour rapidité de modulation $R=1/T_s$):

$$E\{\tilde{x}(t)\} = E\{\tilde{x}(t+T_s)\} \quad \text{et} \quad E\{\tilde{x}(t) \cdot \tilde{x}(t-\tau)\} = E\{\tilde{x}(t+T_s) \cdot \tilde{x}(t-\tau+T_s)\} \quad \forall t$$

$E\{|\tilde{x}(t)|^2\}$ représente la puissance instantanée de $\tilde{x}(t)$, qui dépend de l'instant t (non stationnarité). En raison de la cyclo-stationnarité, on a $E\{|\tilde{x}(t)|^2\} = E\{|\tilde{x}(t+T_s)|^2\}$, et la puissance moyenne $P(\tilde{x})$ correspond à la valeur

$$\text{moyenne de } E\{|\tilde{x}(t)|^2\} \text{ sur un intervalle de durée } T_s : P(\tilde{x}) = \frac{1}{T_s} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T_s} E\{|\tilde{x}(t)|^2\} dt, \quad \forall t_0 \in \mathbb{R}$$

Et l'Energie moyenne par bit $E_b = P(x).T_b = 1/2 . P(\tilde{x}).T_b$ peut s'obtenir par :

$$E_b = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T_s} E\{ |\tilde{x}(t)|^2 \} dt, \quad \forall t_0 \in R$$

où $n = lb(M)$ est le nombre de bits par symbole

Pour des symboles de valeur moyenne nulle ($E\{\tilde{a}_{[m]}\}=0$), décorrés ($E\{\tilde{a}_{[m]} \cdot \tilde{a}_{[m-n]}^*\}=0$ si $m \neq n$), de variance $\sigma_a^2 (= E\{|\tilde{a}_{[m]}|^2\})$, on a : $E\{|\tilde{x}(t)|^2\} = T_s^2 \cdot \sigma_a^2 \cdot \sum_m |h_e(t-mT_s)|^2$, on déduit :

$$E_b = \frac{1}{2} \cdot \sigma_a^2 \cdot \left(\frac{T_s}{n}\right) \cdot T_s \cdot \|h_e\|^2 \quad \text{avec} \quad \|h_e\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |h_e(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |H_e(f)|^2 df$$

NB : pour une bande équivalente de bruit $\|h_e\|^2$ égale à $1/T_s$, on a donc simplement $E_b = 1/2 \cdot \sigma_a^2 \cdot T_b$.

Note annexe : la formule de E_b pour des symboles décorrés et centrés peut aussi se retrouver :

- à partir de l'énergie moyenne par symbole, E_s , du signal modulé $x(t)$:

$$E_b = E_s / lb(M) \quad \text{avec} \quad E_s = E\{E_s^{(i)}\} = \sum_{i=1}^M p_i E_s^{(i)} \quad \text{où : } p_i = \Pr\{\text{symbole émis} = \text{symbole avec l'état } i, \tilde{a}^{(i)}\},$$

$$E_s^{(i)} = \text{énergie du signal modulé pour l'émission d'un seul symbole d'état } i : x^{(i)}(t) = \text{Re}[T_s \tilde{a}^{(i)} h_e(t) \exp(j2\pi f_0 t)]$$

=> On peut donc calculer E_s en faisant la moyenne des $E_s^{(i)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{(i)}(t)^2 dt$ obtenue à partir des M signaux.

Cette procédure est d'ailleurs aussi valable si les symboles ne sont pas centrés mais que le support de l'impulsion élémentaire est limité à $[0; T_s]$, de sorte que les impulsions successives ne se chevauchent pas.

- à partir de la puissance $P_x = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_{\tilde{x}}(f) df$, connaissant la formule de la densité spectrale de puissance moyenne

$$\text{(démontrée en I.3.2)} \quad \Gamma_{\tilde{x}}(f) = \sigma_a^2 T_s \cdot |H_e(f)|^2, \quad \text{sachant que} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |H_e(f)|^2 df = \|h_e\|^2.$$

I.3.2. Densité spectrale de puissance (DSP) moyenne du signal modulé linéairement

On raisonne sur la dsp de l'équivalent complexe en bande de base, puisque la dsp du signal réel s'en déduit.

A partir de $\tilde{x}(t) = \tilde{a}(t) * h_e(t)$, on déduit que la dsp de $\tilde{x}(t)$ s'exprime en fonction de la dsp (T.F. de la fonction d'auto-corrélation) de la suite discrète des symboles réels, et du module au carré de la fonction de transfert $H_e(f) = TF\{h_e(\tau)\}$ du filtre de mise en forme:

$$\Gamma_{\tilde{x}}(f) = \Gamma_{\tilde{a}}(f) \cdot |H_e(f)|^2$$

Notons que cette « déduction » n'est valable qu'en moyenne ($\Gamma_{\tilde{x}}(f)$ et $\Gamma_{\tilde{a}}(f)$ sont des dsp moyennes), car les signaux $\tilde{a}(t)$ et $\tilde{x}(t)$ sont cyclo-stationnaires (mais pas stationnaires), ce qui est précisé dans l'annexe I.3.A.

La dsp des symboles, $\Gamma_{\tilde{a}}(f)$, est périodique, de période $1/T_s$, compte-tenu du caractère « échantillonné » au pas T_s :

$$\Gamma_{\tilde{a}}(f) = T_s \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_{\tilde{a}}[n] \cdot \exp(-j2\pi f n T_s)$$

Le calcul de $\Gamma_{\tilde{a}}(f)$ s'effectue en fonction des propriétés statistiques de la source de symboles :

$$\text{Moyenne } m_{\tilde{a}} = E\{\tilde{a}_{[m]}\}, \text{ auto-corrélation } \gamma_{\tilde{a}[n]} = E\{\tilde{a}_{[m]} \cdot \tilde{a}_{[m-n]}^*\}, \text{ variance } \sigma_{\tilde{a}}^2 = E\{|\tilde{a}_{[m]} - m_{\tilde{a}}|^2\} = \gamma_{\tilde{a}[0]} - |m_{\tilde{a}}|^2;$$

On trouve (Cf annexe I.3.a) que :

$$\Gamma_{\tilde{a}}(f) = T_s \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\gamma_{\tilde{a}[n]} - |m_{\tilde{a}}|^2) \cdot \exp(-j2\pi n f T_s) + |m_{\tilde{a}}|^2 \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - \frac{n}{T_s})$$

$\Gamma_{\tilde{a}}(f)$ est la somme de 2 contributions :

- un spectre (généralement) continu (terme de gauche) : donné par la dsp des symboles discrets centrés (auxquels on a retiré la valeur moyenne : $a_{[mj]}^c = a_{[mj]} - m_a$) => véhicule l'information ;
- et 1 spectre de raies (terme de droite) : raies situées aux fréquences $\{\pm n/T_s; n \in \mathbb{Z}\}$ due à la composante continue des symboles, m_a . Dans le spectre global de $\Gamma_{\tilde{x}}(f)$, ces raies n'existent évidemment pas aux fréquences $\{\pm n/T_s\}$ pour lesquelles $H_e(n/T_s)=0$;

Ces raies sont généralement indésirables car elles consomment de l'énergie, que l'on préfère réserver à la partie continue du spectre porteuse d'information. On s'arrange alors pour les éviter en prenant soin d'avoir une suite centrée.

Note annexe: dans le cas particulier (pas d'intérêt sauf application particulière, canal de synchronisation, ...) où la suite de symboles serait périodique, de période N , le terme de gauche ne serait pas continu mais deviendrait un spectre de raies espacées tous les $1/(NT_s)$.

Cas de symboles centrés et décorrelés ($m_a=0$; $\gamma_{a[n]} = \sigma_a^2 \cdot \delta_{[n]}$) = situation courante (pour transmission sur porteuse) ; Dans ce cas, la DSP des symboles est blanche ($\Gamma_{\tilde{a}}(f) = \sigma_a^2 T_s$ V²/Hz) et la forme de la DSP de l'équivalent complexe en bande de base du signal modulé dépend uniquement de la fonction de transfert du filtre de mise en forme :

$$\Gamma_{\tilde{x}}(f) = \sigma_a^2 T_s \cdot |H_e(f)|^2$$

- Pour le signal réel modulé sur fréquence porteuse la dsp de $\Gamma_x(f)$ est donc obtenu par translations de $\Gamma_{\tilde{x}}(f)$ (avec facteur 1/4) autour de $+f_0$ et de $-f_0$ (avec retournement, Cf I.2.1).
- Dans le cas de symboles décorrelés et centrés de variance σ_a^2 , on obtient, en tenant compte que $h_e(\tau)$ est réelle (et donc $|H_e(-f)| = |H_e(f)|$) :

$$\Gamma_{\tilde{x}}(f) = \sigma_a^2 T_s \cdot |H_e(f)|^2 \quad \Rightarrow \quad \Gamma_x(f) = \frac{1}{4} \cdot \sigma_a^2 T_s \cdot (|H_e(f - f_0)|^2 + |H_e(f + f_0)|^2)$$

L'encombrement spectral dépend donc uniquement du filtre de mise en forme $h_e(t)$, généralement proportionnel au débit symbole,

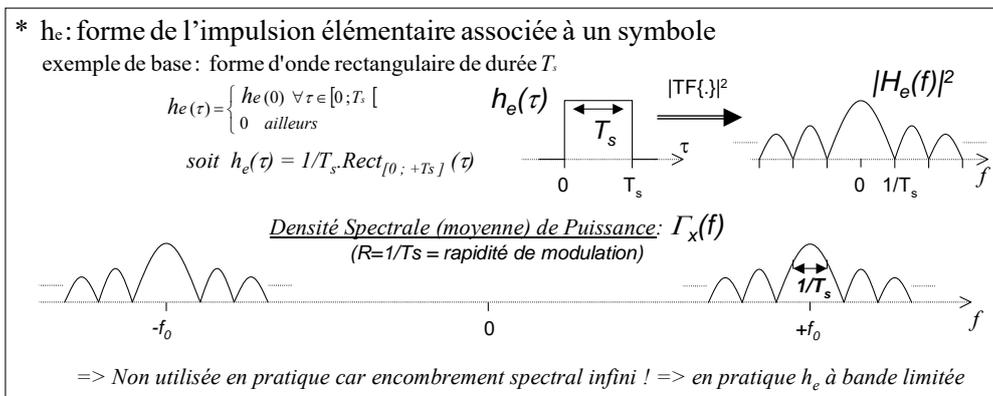


figure 3.1.8 : illustration de la DSP du signal modulé linéairement (symboles dé-correlés et centrés).

Nous allons donner maintenant les **exemples de modulations linéaires les plus classiques** :

Nous traitons seulement le cas de symboles indépendants (modulations sans mémoire). Pour faciliter la présentation, les exemples sont donnés avec une forme d'onde rectange ($T_s \cdot h_e(\tau) = \text{Rect}_{[0, T_s]}(\tau)$), même si elle est rarement utilisée en pratique (à cause d'un encombrement spectral infini), comme nous le verrons en partie II de ce chapitre.

Nous donnerons quelques exemples de *constellations*: représentation des M états possibles des symboles de modulation, avec partie réelle en abscisse, partie imaginaire en ordonnée, avec des étiquetages (passage des bits D après codage différentiel éventuel => symboles) possibles (mais non uniques !).

1.3.3 MDP-M : Modulation De Phase à M états : (« M-PSK » en anglais : Phase Shift Keying)

La constellation de la modulation est circulaire, avec les M états possibles des symboles décrit par :

$$\tilde{a}_{[m]} = a_{I[m]} + j \cdot a_{Q[m]} \in A_{mod} = \{ A \cdot \exp(j\phi_i), \text{ avec } \phi_i = i \cdot 2\pi/M, \text{ pour } i = 0 \dots M-1 \}$$

Exemples :

- « BSPK » (MDP-2) : M=2 (cte = 0); => $\phi_i = \{0; \pi\}$, constellation équivalente à MAQ-2
- « QPSK » (MDP-4) : M=4 (cte = $\pi/4$); => $\phi_i = \{\pi/4; 3\pi/4; 5\pi/4; 7\pi/4\}$, constellation équivalente à MAQ-4
- « 8-PSK » (MDP-8) : M=8 (cte = 0); => $\phi_i = \{0; \pi/4; \pi/2; \dots; 7\pi/4\}$

Avec une forme d'onde carrée de durée limitée à T_s , pour $t \in [mT_s, (m+1)T_s[$: $x(t) = A \cdot \cos(2\pi f_0 t + \phi_{[m]})$

Choix d'un symbole => choix de $\phi_{[m]} \in \{cte + 2\pi i/M\}$.

La porteuse n'est modulée qu'en phase.

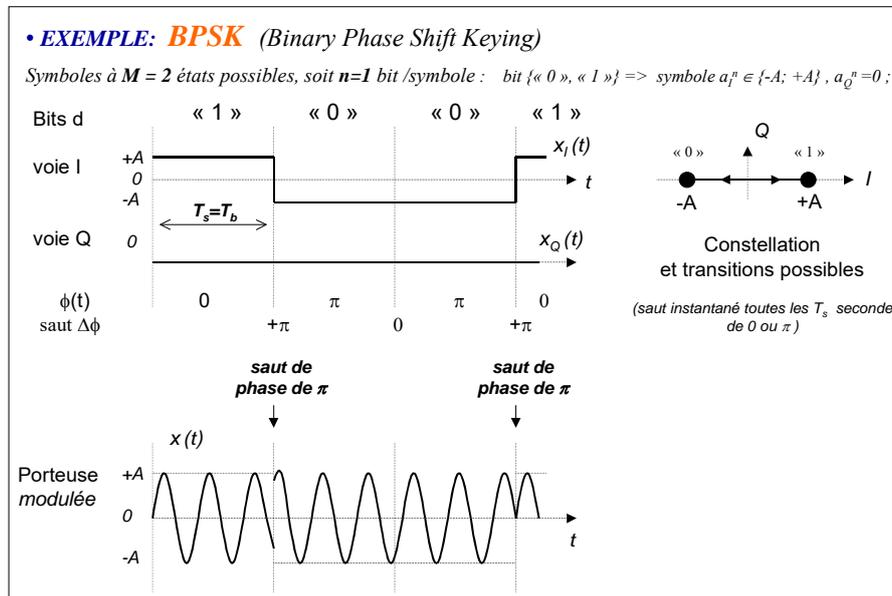


figure 3.1.9 : illustration pour la modulation à 2 états de phase.

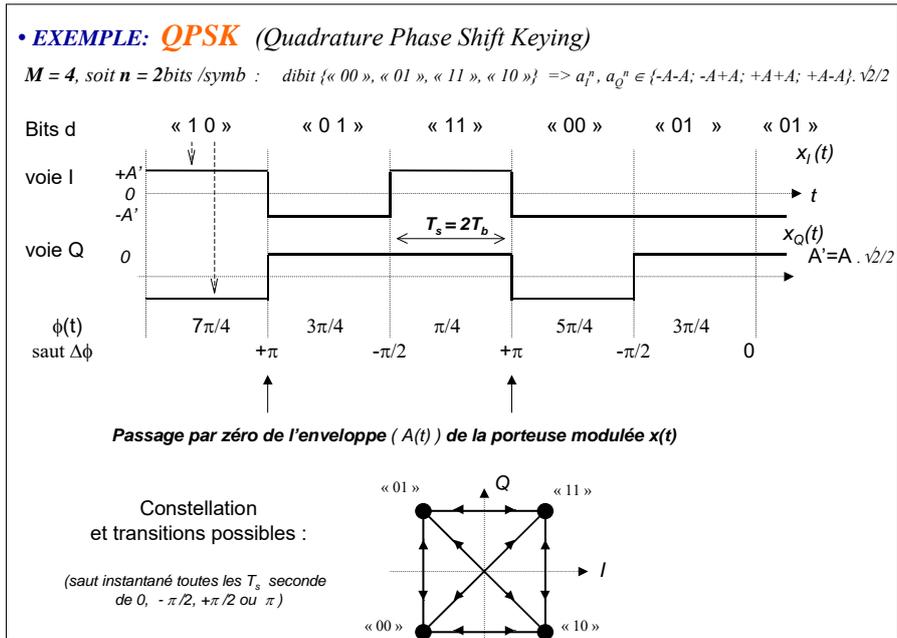


figure 3.1.10 : illustration pour la modulation à 4 états de phase.

1.3.4 MAQ-M : Modulation d'Amplitude en Quadrature à M états (« M-QAM » en anglais : Quadrature Amplitude Modulation)

Les symboles complexes $\tilde{a}_{[m]}$ sont donnés par :

$$\tilde{a}_{[m]} = a_{I[m]} + j \cdot a_{Q[m]} \quad \text{avec } a_{I[m]} \text{ et } a_{Q[m]} \in A_{\text{mod}} = \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm(M^{1/2} - 1)\} \cdot A$$

La porteuse et la porteuse en quadrature sont donc modulés en amplitude par les symboles réels $a_{I[m]}$ et $a_{Q[m]}$;

Exemple : MAQ-4 : 2 états possibles $\{-A ; +A\}$ sur chaque voie (I, Q)
MAQ-16 : 4 états possibles $\{-3A ; -A ; +A ; +3A\}$ sur chaque voie (I, Q)

Avec une forme d'onde carrée de durée limitée à T_s , l'écriture générale de la modulation se simplifie durant une période symbole, entre $[mT_s, (m+1)T_s[$, où $x(t)$ prend une forme possible $x^i(t)$ parmi M :

$$x(t) = a_{I[m]} \cdot \cos(2\pi f_0 t) + a_{Q[m]} \cdot \cos(2\pi f_0 t + \pi/2) \quad \text{et sous forme polaire : } x(t) = A_{[m]} \cdot \cos(2\pi f_0 t + \varphi_{[m]})$$

avec $A_{[m]} \cdot \exp(j\varphi_{[m]}) = a_{I[m]} + j \cdot a_{Q[m]}$;

Globalement, la porteuse est ainsi modulée en amplitude (états $A_{[m]}$) et en phase (états $\varphi_{[m]}$).

1.3.5 Modulation d'Amplitude :

(« M-PAM » ou « M-ASK » en anglais : Pulse Amplitude Modulation, ou Amplitude Shift Keying)

La porteuse en quadrature n'est pas utilisée : $a_{Q[m]} = 0 \Rightarrow$ cas particulier (« rarement employé »)

Exemples : - MDA-M : $a_{I[m]} \in A_{\text{mod}} = \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm(M-1)\} \cdot A'$
- Modulation tout ou rien $a_{I[m]} \in A_{\text{mod}} = \{0, A\}$

Avec une forme d'onde carrée de durée limitée à T_s , pour $t \in [mT_s, (m+1)T_s[$: $x(t) = a_{I[m]} \cdot \cos(2\pi f_0 t)$

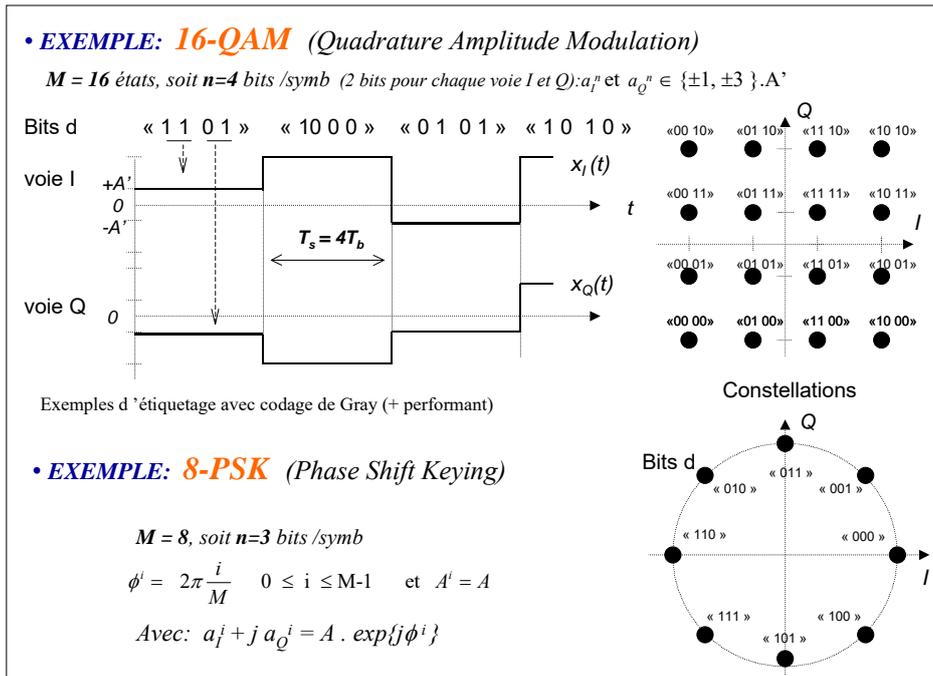


figure 3.1.9 : illustration de constellations modulations à nombre d'états supérieurs à 4.

Remarque sur la bande occupée par le signal modulé:

- dans les exemples classiques présentés (hypothèses symboles dé-corrélés et équiprobables), la dsp du signal modulé a la forme du module au carré de $H_e(f)$, portée autour de $\pm f_0$. La bande de $H_e(f)$ étant infinie, cela contredit l'hypothèse de signal bande étroite, mais compte-tenu de la décroissance des lobes secondaires de $H_e(f)$, elle reste valide si $f_0 T_s \gg 1$.
- en pratique, les formes d'ondes $h_e(\tau)$ réellement utilisées (différentes des fonctions portes présentées) sont à bande limitée. Nous verrons dans la 2^e partie du chapitre que la bande nécessaire à une bonne transmission (sans interférence entre symboles) ne dépend en fait que du débit symbole. Pratiquement, la limitation de bande pourra se faire soit directement en mettant en forme les symboles avec la bonne forme d'onde (*le plus courant aujourd'hui*), ou bien en imposant un filtrage adéquat au signal mis en forme initialement par les fonctions « portes » (*issu d'un codeur en ligne amont utilisant des niveaux logiques par exemple*), sans altérer l'information numérique véhiculée.

Introduction au codage différentiel :

Dans cette introduction aux modulations sur fréquence porteuse, nous avons supposé jusqu'à présent que les bits (b) à transmettre servaient directement à coder l'état des symboles (a). Cela peut être le cas en pratique, mais dans beaucoup de situations, on introduit un codage différentiel préalable pour transformer (même débit $1/T_b$) les bits (b) en nouveaux bits (d), et c'est seulement à partir de ces bits (d) que le passage aux symboles (a) se fait (Cf figure 3.1.1). Nous ne rentrons pas dans le détail ici (exemples en TD), mais l'idée du codage différentiel est de faire en sorte que les bits d'information (b) codent finalement **non pas l'état** des symboles (a) mais le **changement** d'état. En effet, à cause des symétries des différentes constellations, par exemple par rotation de $2\pi/M$ en modulation de phase à M états, on aura (sauf insertion d'une séquence connue) une ambiguïté de $2\pi/M$ sur l'état des symboles estimés à la réception (car récupération de porteuse utilisée pour la démodulation « cohérente » s'asservira sur la phase adéquate la plus proche modulo $(2\pi/M)$). Cependant, quelque soit la référence de phase adoptée (c'est à dire le repère de projection de la constellation « redressée » adopté), il n'y a pas d'ambiguïté sur le **changement d'états**, d'un symbole à l'autre.

Exemple en BPSK : sauts de phase possibles entre deux symboles successifs : 0 ou $+\pi$.

Les bits (d') après démodulation correspondront, selon les arrêts/marches aux bits (d), ou bien aux bits opposés (\bar{d}) si la démodulation a été réalisée avec une erreur systématique (ambiguïté) de π .

Mais l'ambiguïté est levée si on utilise un codage différentiel défini tel que :

- le bit $b_{[m]} = 1$ crée un saut de phase de π sur le symbole $a_{[m]}$ par rapport au symbole précédent $a_{[m-1]}$,
- le bit $b_{[m]} = 0$ ne crée aucun saut de phase.

En repérant à la réception, la présence ou non d'un saut de phase, on pourra décider du bit transmis.

On peut vérifier qu'il suffit pour cela d'utiliser (en BPSK) à l'émission le codage différentiel suivant :

$$d_{[m]} = d_{[m-1]} \oplus b_{[m]}, \quad \text{avec } \oplus : \text{opérateur XOR,}$$

(on a l'étiquetage classique bits $d = \{0, 1\} \Rightarrow$ symboles $a = \{-A; +A\}$ par exemple)

A la réception, la règle de décodage différentiel pour retrouver les bons bits (b') à partir des bits (d'), est:

$$b'_{[m]} = d'_{[m-1]} \oplus d'_{[m]}$$

si $d'_{[m]} = d_{[m]}, \forall m$, ou au contraire $d'_{[m]} = \bar{d}_{[m]} \forall m$, on retrouve bien les bons bits : $b'_{[m]} = b_{[m]}$.

Le seul inconvénient mineur est un TEB (approximativement) multiplié par 2 en cas d'erreurs de transmission (isolées).

On ne fait pas systématiquement de codage différentiel, car dans beaucoup de systèmes, on dispose de l'envoi d'une séquence connue du récepteur en début de transmission (ou périodiquement répété en début d'une trame), ce qui permettra de lever l'ambiguïté.

1.3.6. Modulations QPSK à trains décalés (« Offset QPSK »)

Caractéristiques comparatives des modulations décalées :

- **moins (ou pas) de variation d'enveloppe** = leur grand intérêt.
Permet d'être plus robuste aux non-linéarités (amplification de puissance ...) qui ont tendance en QPSK à créer des composantes de spectre hors bande, et à dégrader les performances en Taux d'erreur Binaire à la réception.
- **encombrement spectral** idem (que modulation équivalente sans trains décalés)
- **modulation « mono »-dimensionnelle** : « changement d'état de modulation sur une seule porteuse (I ou Q) à la fois », tous les $T_s/2 \Rightarrow$ facilite codage différentiel, synchronisation, ...

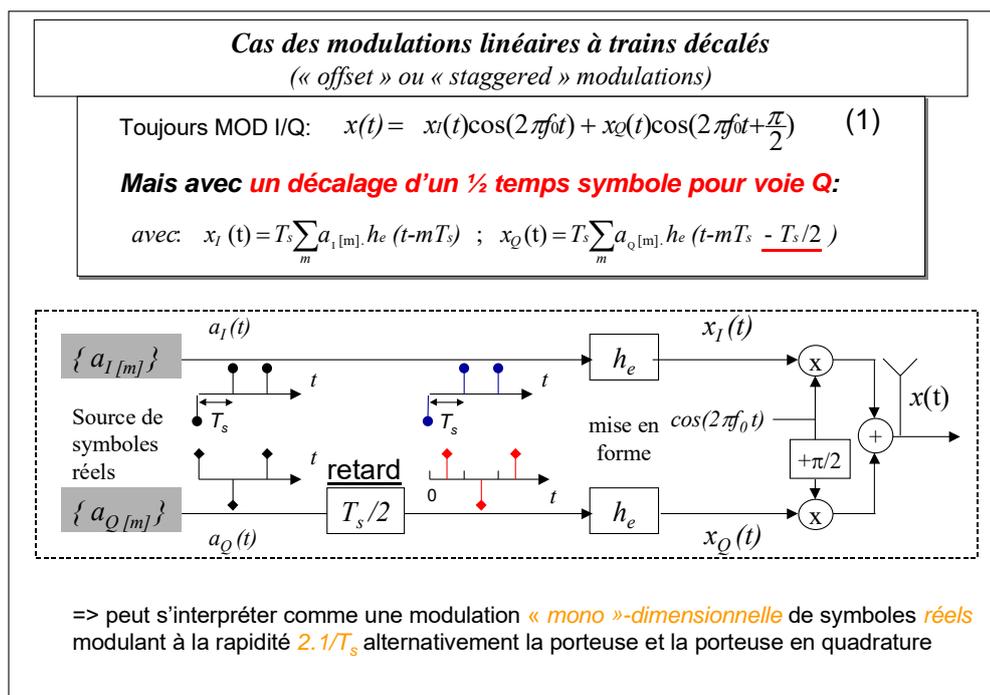


figure 3.1.10 : principe de la modulation linéaire à trains décalés.

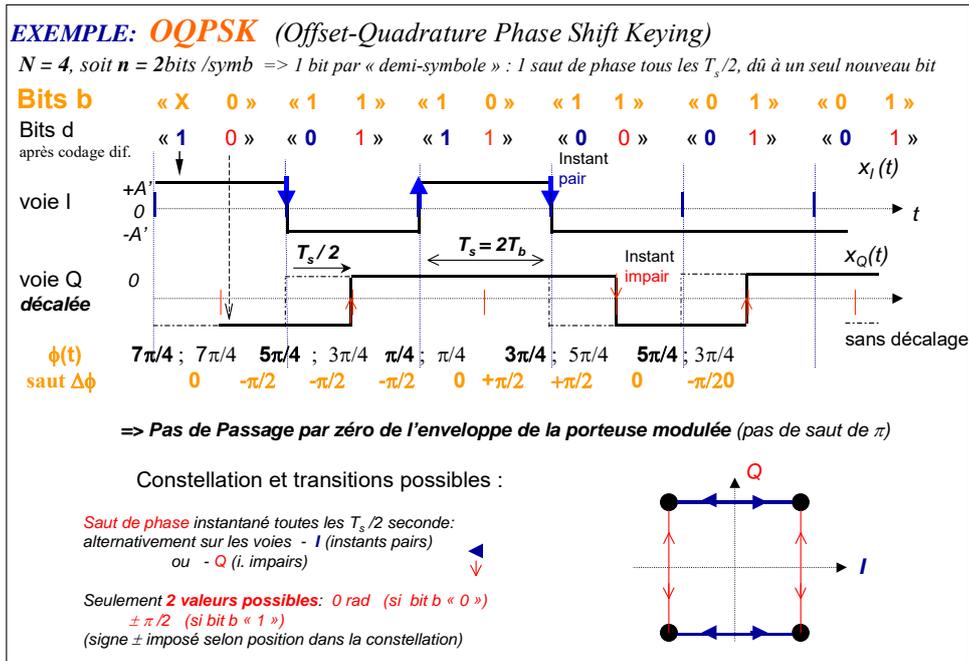


figure 3.1.11 : illustration du passage bits $b \Rightarrow$ bits d (après codage différentiel) \Rightarrow trains $x_I(t)$, $x_Q(t)$ en OQPSK.

Annexe : codage différentiel en OQPSK

Peut se faire séparément pour les bits de la voie I et les bits de la voie Q (contrairement au cas QPSK), comme 2 trains de modulation BPSK indépendants et décalés :

Le train de bits d'information $b_{[n]}$ est séparé en un train de bits « pair » $b_{I[m]} = b_{[2m]}$ (qui codera la voie I) et un train de bits impairs $b_{Q[m]} = b_{[2m+1]}$. On applique alors le même codage différentiel qu'en BPSK pour passer séparément des $b_{I[m]} = b_{2m}$ aux bits $d_{I[m]} = d_{2m}$ et des bits $b_{Q[m]} = b_{2m+1}$ aux bits $d_{Q[m]} = d_{2m+1}$

Donc pour la voie paire (I):

$$\text{Codage : } d_{2m} = d_{2m-2} \oplus b_{2m},$$

$$\text{Décodage : } b'_{2m} = d'_{2m-2} \oplus d'_m,$$

Pour la voie impaire (Q) :

$$\text{Codage : } d_{2m+1} = d_{2m-1} \oplus b_{2m+1},$$

$$\text{Décodage : } b'_{2m+1} = d'_{2m-1} \oplus d'_{2m+1},$$

I.4 AUTRE MODULATION : Modulation de fréquence

Modulation de fréquence

particularités : modulation à enveloppe constante, démodulation non-cohérente possible (à l'aide d'une « PLL », en général modulation non linéaire)

Δf : espacement entre les M fréquences discrètes :

$$a_{[m]} \cdot \Delta f \in \{-(M/2 - 1/2) \cdot \Delta f, \dots, -1/2 \cdot \Delta f, +1/2 \cdot \Delta f, \dots, +(M/2 - 1/2) \cdot \Delta f\}$$

formées à partir de M symboles $a_{[m]}$ d'amplitudes $\in \{\dots, -1/2, +1/2, \dots\}$

$h = \Delta f \cdot T_s$: indice de la modulation, en pratique < 1

Enveloppe complexe: $\tilde{x}(t) = A \cdot \exp\{j\phi(t)\}$ soit $x(t) = A \cos\{2\pi f_0 t + \phi(t)\}$

phase $\phi(t)$ définie sur une période symbole, pour $t \in [mT_s; (m+1)T_s]$, par :

1) **M. de fréquence à phase discontinue :** $\phi(t) = 2\pi \cdot \underbrace{\Delta f \cdot a_{[m]}}_{\text{freq. instantanée}} \cdot t$
(Frequency Shift-Keying : FSK)

2) **M. de fréquence à phase continue :** $\phi(t) = 2\pi \Delta f \cdot \int_{mT_s}^t a_{[m]} d\tau + \phi(mT_s)$
(Continuous-Phase Frequency Shift-Keying : CP-FSK)

=> Modulation **avec mémoire** pour assurer la continuité de phase d'un symbole à l'autre

I.4.1) Modulation de fréquence sans mémoire : M-FSK

une « fréquence discrète parmi M » bien déterminée durant T_s , pour $t \in [mT_s; (m+1)T_s]$:
 $x(t) = A \cos\{2\pi(f_0 + f_i)t\} = x^{(i)}(t)$, avec $f_i \in \{-\Delta f \cdot (M/2 - 1), \dots, -\Delta f/2, +\Delta f/2, \dots, +\Delta f \cdot (M-1)/2\}$

• **EXEMPLE à 2 états: 2-FSK**

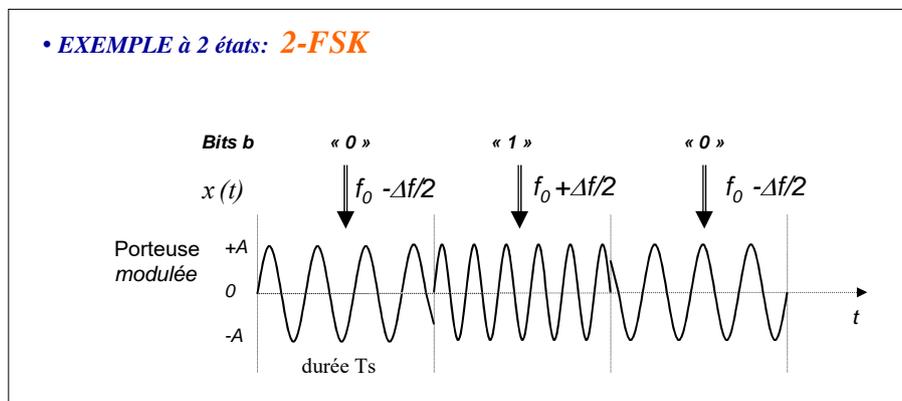


figure 4.1.1 : illustration de la porteuse modulée en 2-FSK.

Propriété : pour indice $h = 1/2$ ou multiple, les M signaux réels en bande portée possibles sont *orthogonaux* (mais un seul est envoyé à la fois dans cette modulation, contrairement à la modulation linéaire OFDM) :

$$\frac{2}{T_s} \cdot \langle x^{(i)}, x^{(k)} \rangle = \delta_{ik} \quad \text{avec} \quad x^{(i)}(t) = \cos\left\{2\pi\left(f_0 + \Delta f \cdot \left(i - \frac{1}{2}\right)\right)t\right\} \cdot \text{Rect}_{[0;T_s]}(t) \quad \text{pour } i = -(M/2 - 1), \dots, M/2$$

$$\text{(produit scalaire } \langle x^{(i)}, x^{(k)} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{(i)}(t) \cdot x^{(k)*}(t) dt \quad \text{nul pour } i \neq j)$$

En effet : $\Delta f = 1/2 \cdot 1/T_s$ est l'écart de fréquence minimum pour que 2 signaux (durée T_s) soient orthogonaux.

$$\text{pour } k = i+1, \text{ on vérifie : } \langle x^{(i)}, x^{(i+1)} \rangle = \frac{1}{2} \int_0^{T_s} \cos(2\pi \cdot \Delta f \cdot t) dt = 0 \quad \text{pour } \Delta f = \frac{1}{2} \frac{1}{T_s} \text{ ou multiple}$$

Inconvénient de la modulation FSK : discontinuité de phase de la porteuse modulée lors d'un changement de fréquence (similaire à la commutation entre 2 oscillateurs indépendants), entraîne une occupation spectrale importante (Calcul de la DSP difficile, hors programme).

I.4.2) Modulation de fréquence à phase continue : CP-FSK

Modulation De Fréquence à phase continue (1)
(CP-FSK: Continuous-Phase Frequency Shift Keying)

$x(t) = A \cos\{ 2\pi f_0 t + \phi(t)\}$ avec la phase définie par : $\phi(t) = 2\pi\Delta f \cdot \int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau$

à partir du train de symboles mis en forme : $s(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_{[m]} \cdot \text{Rect}_{[0;T_s]}(t - mT_s)$
(mod PAM en bande de base avec filtre typique NRZ)

avec: $a_{[m]} \in \{-(M/2 - 1), \dots, 0, +1, \dots, +M/2\} - 1/2$ (si M pair)

=> Modulation **avec mémoire** pour assurer la continuité de phase d'un symbole à l'autre :

pour $t \in [mT_s; (m+1)T_s]$: $\phi(t) = 2\pi\Delta f \cdot \int_{mT_s}^t s(\tau) d\tau + \phi(mT_s)$

=> Variation de **phase linéaire** durant T_s : $\phi(t) = (2\pi\Delta f \cdot a_{[m]}) \cdot t + \text{constante}[m]$

Modulation De Fréquence à phase continue (2)
(CP-FSK: Continuous-Phase Frequency Shift Keying)

=> peut-être réalisée à l'aide d'un filtre de mise en forme et d'un VCO :

Équation VCO $\left\{ \begin{array}{l} x(t) = A \cos\{ 2\pi f_0 t + \phi(t)\} \\ \text{avec } \frac{d\phi(t)}{dt} = 2\pi\Delta f \cdot s(t) \end{array} \right.$

Cas particulier :

MDF à phase continue (3)

Modulation à gradient de phase minimal, MSK: Minimum Shift Keying

avec $M = 2$ états, et indice de modulation $h = \Delta f \cdot T_s = 1/2$

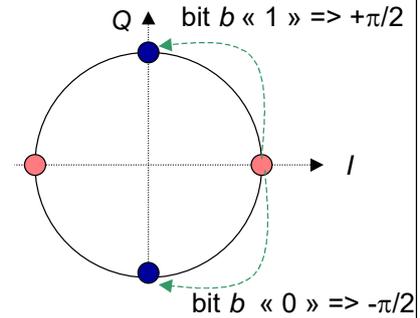
bits données $b_m \in \{ 0 ; 1 \}$

symboles: $a_m \in \{ -1/2 ; +1/2 \}$

écart fréq. : $\Delta f_{inst} \in \{ -D_s/4 ; +D_s/4 \}$

=> **Incrément continu de phase durant $T_s = T_b$ de :**

$$\Delta\phi \in \{ -\pi/2 ; +\pi/2 \}$$



Utilisée en **GSM**, avec complément de filtrage Gaussien (limite le spectre) => **GMSK** : Gaussien-MSK

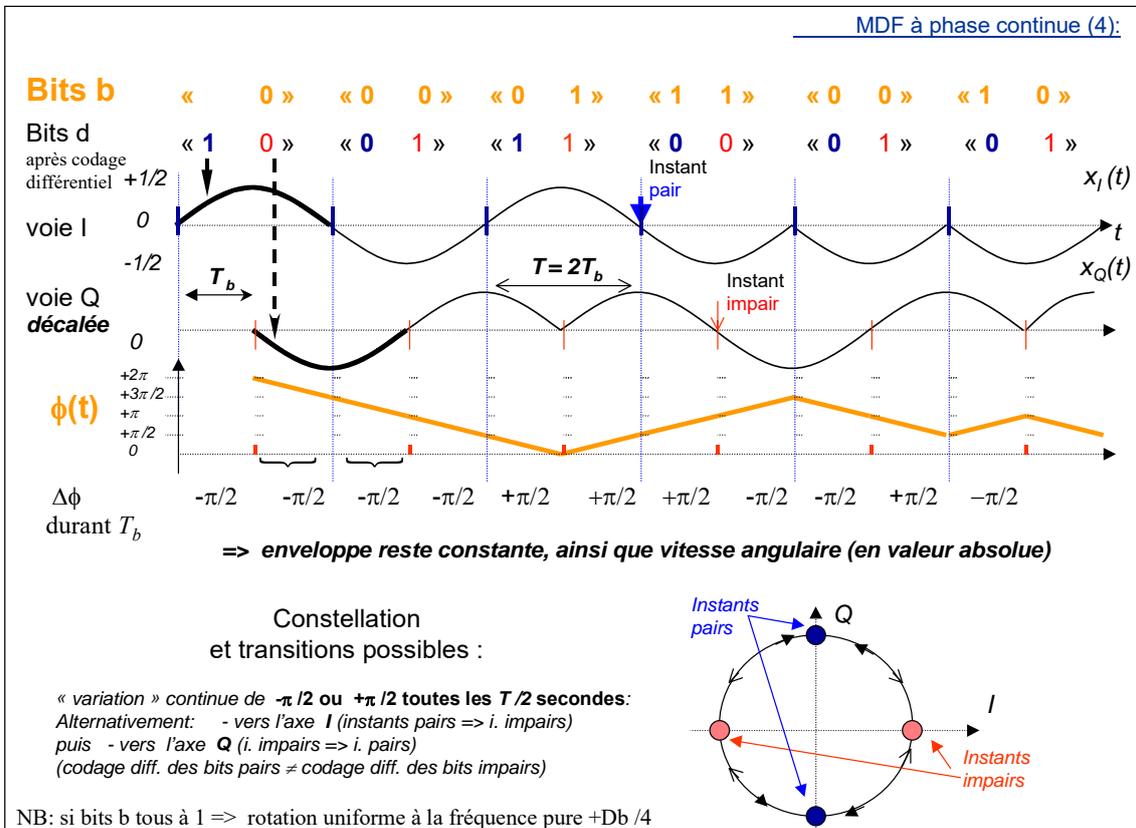
Annexe: peut s'interpréter (se construire) comme 1 **modulation linéaire à trains décalés**

toujours MOD I/Q: $x(t) = x_I(t) \cos(2\pi f_0 t) + x_Q(t) \cos(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{2})$

avec: $x_I(t) = T \sum_m a_{I[m]} \cdot h_e(t-mT)$ mais $x_Q(t) = T \sum_m a_{Q[m]} \cdot h_e(t-mT - T/2)$

et **filtre de mise en forme en arche de 1/2 sinusoïde durant T:** $h_e(\tau) = 1/T \cdot \sin(\pi \tau/T) \cdot \text{Rect}_{[0; T]}(\tau)$

symboles à 2 états réels sur voies I et Q (non indépendants, obtenus à l'aide d'un codage différentiel des bits), de durée $T = 2T_b$, avec **décalage de $T/2$** entre les symboles des voies I et Q



ANNEXES
(partie 1)

Annexe I.1.A: Rappel transmission en bande de base par « modulation d'impulsion en amplitude » ou « codes en ligne »

Pour le cas de la modulation en bande de base, les symboles sont réels, et permettent de construire directement $x(t)$.

I.1.2.a) Modèle mathématique général d'une modulation en bande de base

Dans le cas le plus général, on associe de façon unique une forme d'onde $x^i(t)$ à chacun des symboles réels possibles A_i (obtenus à partir de n bits) :

$$A_{mod} = \{A_0, A_1, \dots, A_{M-1}\} \Rightarrow \{x^0(t), x^1(t), \dots, x^{M-1}(t)\}$$

Le signal modulé $x(t)$ est construit à partir de l'émission tous les temps symboles, aux instants $m.T_s$, ($m \in \mathbb{Z}$) d'un signal $x^{i_m}(t)$ choisi parmi les M possibles :

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x^{i_m}(t - mT_s) \quad ; \quad i_m \in \{0, 1, \dots, M-1\}$$

Dans la plupart des cas, les signaux $\{x^i(t)\}$ peuvent aussi s'exprimer en fonction d'une forme d'onde élémentaire

$$x_e(t) = T_s \cdot h_e(t) \quad \text{unique} : \quad x^i(t) = A_i \cdot x_e(t) \quad ; \quad i = 0, 1, \dots, M-1$$

Exemple : mise en forme rectangle de durée T_s : $T_s \cdot h_e(\tau) = \text{Rect}_{[0, T_s]}(\tau) = 1$ pour $\tau \in [0 ; T_s[$, 0 sinon.

Symboles binaires $M=2$: bits $\{0 ; 1\} \Rightarrow A_{mod} = \{-A, +A\}$

$\Rightarrow x(t)$ évolue entre $-A$ et $+A$, avec une amplitude constante sur une durée T_s

Ainsi, en adoptant la notation simplifiée pour exprimer les symboles successifs $a_{[m]} \in A_{mod}$ à transmettre aux instants mT_s , on obtient le modèle mathématique suivant pour $x(t)$:

$$x(t) = T_s \cdot \sum_m a_{[m]} \cdot h_e(t - mT_s)$$

où : $h_e(\tau)$ est appelé filtre de mise en forme des symboles, ou impulsion élémentaire

I.1.2.b) Exemple de Modulations d'Impulsion en Amplitude (MIA), aussi appelées « codes en ligne »

Le mot « code » a une signification particulière ici, puisqu'il désigne un codage à signal M-aire, c'est à dire une modulation. On emploiera ici préférentiellement le mot « format ».

On ne présente que les modulations sans mémoire, c'est à dire à symboles indépendants (donc décorrélés).

- **Format NRZ (Non Retour à Zéro) binaire (et polaire) :** $M = 2$; $A_{mod} = \{-A, +A\}$; $T_s \cdot h_e(\tau) = \text{Rect}_{[0, T_s]}(\tau)$;

Ainsi : bit 0 $\Rightarrow x^0(t) = -A \cdot \text{Rect}_{[0, T_s]}(t)$

bit 1 $\Rightarrow x^1(t) = +A \cdot \text{Rect}_{[0, T_s]}(t)$

- **Format NRZ M-aire (polaire) :** $M = 2^n$; $A_{mod} = A \cdot \{\pm 1 ; \pm 3 ; \pm(2p+1) ; \dots ; \pm(M-1)\}$; $T_s \cdot h_e(\tau) = \text{Rect}_{[0, T_s]}(\tau)$;

Ainsi : $x(t)$ est un signal à M niveaux d'amplitudes,

On a donc besoin ici de n bits pour former un symbole de modulation à M états possibles.

D'autres exemples sont rappelés en annexe I.3.B.

Annexe I.3.A: Calcul de la densité spectrale de puissance du signal modulé linéairement

(Cf livre de A. Glavieux ou C. Bic pour les détails de la démonstration):

On considère le cas le plus général de l'enveloppe complexe (ou bien signal réel dans le cas d'une modulation en bande de base) du signal issu d'une modulation numérique linéaire, de la forme : $\tilde{x}(t) = T_s \cdot \sum_m \tilde{a}_{[m]} \cdot g(t - mT_s)$

où la source de symboles complexes $\tilde{a}_{[m]}$ est stationnaire, de moyenne $m\bar{a} = E\{\tilde{a}_{[m]}\}$ et de fonction d'auto-corrélation $\gamma_{\tilde{a}[n]} = E\{\tilde{a}_{[m]} \cdot \tilde{a}_{[m-n]}^*\}$, la fonction de mise en forme $g(\tau)$ peut-être complexe, et de durée quelconque.

La fonction de corrélation du signal aléatoire $\tilde{x}(t)$ est définie par : $\gamma_{\tilde{x}}(t, \tau) = E\{\tilde{x}(t) \cdot \tilde{x}^*(t-\tau)\}$

En utilisant l'expression de $\tilde{x}(t)$, on obtient: $\gamma_{\tilde{x}}(t, \tau) = T_s^2 \cdot \sum_n \gamma_{\tilde{a}[n]} \sum_m g(t - mT_s) \cdot g^*(t - \tau - mT_s + nT_s)$

Alors que la suite de symboles $\tilde{a}_{[m]}$ est stationnaire, $\tilde{x}(t)$ n'est pas stationnaire au sens large puisque $\gamma_{\tilde{x}}(t, \tau)$ dépend de l'instant de référence, t , et non pas seulement du retard τ ($\tau = t - t'$). De même $E\{\tilde{x}(t)\} = m\bar{a} \cdot T_s \sum g(t - mT_s)$ varie avec t . Dans un cas général de non-stationarité, la Transformée de Fourier (TF) en τ de $\gamma_{\tilde{x}}(t, \tau)$ dépend de l'instant t , et ne permet pas de définir la dsp du signal. Pour le cas du signal de com. numériques, $\tilde{x}(t)$, les instants de changement de symbole jouent un rôle privilégié. On remarque une périodicité de $\gamma_{\tilde{x}}(t, \tau)$ et de $E\{\tilde{x}(t)\}$ en t , de période T_s :

$$\forall t: \quad \gamma_{\tilde{x}}(t, \tau) = \gamma_{\tilde{x}}(t + T_s, \tau); \quad \text{et} \quad E\{\tilde{x}(t)\} = E\{\tilde{x}(t + T_s)\}$$

$\tilde{x}(t)$ est dit cyclo-stationnaire de période (**Ts**) .

Dans ce cas, la densité spectrale de puissance s'obtient par TF de la fonction d'autocorrélation moyennée pour des instants de référence t variables (loi uniforme) entre 0 et T_s (on introduit une incertitude sur l'instant de référence pour les différentes réalisations de signal prises en compte dans l'évaluation des moments statistiques) :

- $\overline{\gamma_{\tilde{x}}(\tau)} = \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} \gamma_{\tilde{x}}(t, \tau) dt \Rightarrow \overline{\gamma_{\tilde{x}}(\tau)} = T_s \sum_n \gamma_{\tilde{a}[n]} \int_{-\infty}^{+\infty} g(u) \cdot g^*(u - \tau + nT_s) du = T_s \sum_n \gamma_{\tilde{a}[n]} \cdot C_g(\tau - nT_s)$
 où $C_g(\tau)$: fonction de corrélation (déterministe, à énergie finie) de $g(\tau)$:

$$C_g(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \cdot g^*(t - \tau) dt = (g * g^H)(\tau) \xrightarrow{\text{TF}} |G(f)|^2,$$

avec $g^H(\tau) = g^*(-\tau)$, et $G(f) = TF\{g(\tau)\} \Rightarrow G^*(f) = TF\{g^H(\tau)\}$

on a également l'écriture : $\overline{\gamma_{\tilde{x}}(\tau)} = T_s \underbrace{\sum_n \gamma_{\tilde{a}[n]} \cdot \delta(\tau - nT_s)}_{\gamma_a(\tau)} * C_g(\tau)$

D'où : $\Gamma_{\tilde{x}}(f) = TF\{\overline{\gamma_{\tilde{x}}(\tau)}\} \Rightarrow \Gamma_{\tilde{x}}(f) = TF\{\gamma_{\tilde{a}}(\tau)\} \cdot TF\{C_g(\tau)\} = \Gamma_{\tilde{a}}(f) \cdot |G(f)|^2$
 avec $\Gamma_{\tilde{a}}(f) = T_s \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_{\tilde{a}[n]} \cdot \exp(-j2\pi f n T_s)$

- décomposition de $\Gamma_a(f)$: $\Gamma_a(f) = T_s \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_{a^c[n]} \cdot \exp(-j2\pi f n T_s) + T_s \cdot |m\bar{a}|^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(-j2\pi f n T_s)$
 où $\gamma_{a^c[n]} = \gamma_{a[n]} - |m\bar{a}|^2$ est la fonction d'autocorrélation de la suite de symboles centrés, $a^c[m] = a[m] - m\bar{a}$;
 En utilisant : $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(-j2\pi f n T_s) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - \frac{n}{T_s})$, on en déduit la formule générale de la dsp de $a(t)$:

$$\Gamma_a(f) = T_s \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\gamma_{\tilde{a}[n]} - |m\bar{a}|^2) \cdot \exp(-j2\pi f n T_s) + |m\bar{a}|^2 \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - \frac{n}{T_s})$$

constituée d'une partie à spectre continu (sauf cas pathologiques) et d'un spectre de raies.

La partie à spectre continu peut être simplifiée (comme en An I.3.B) pour des symboles réels où $\gamma_{a[-n]} = \gamma_{a[n]} \forall n \in \mathbb{Z}$.

Annexe I.3.B : Cas des transmissions en bande de base : exemples de « codes en ligne » avec leurs DSP

On ne présente que les modulations sans mémoire, c'est à dire à symboles indépendants (donc décorrélés).

L'expression du signal à transmettre en bande de base est similaire à l'équivalent complexe en bande de base d'une modulation linéaire, mais avec des grandeurs réelles. L'expression générale de la DSP est valable, et peut aussi s'écrire

$$(\text{symboles « réels »}) : \Gamma_x(f) = \sigma_a^2 T_s + 2 T_s \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_{a[n]} - |m_a|^2) \cdot \cos(2\pi n f T_s) + |m_a|^2 \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - \frac{n}{T_s})$$

On en déduit que la dsp des symboles centrés $a^{[m]} = a_{[m]} - m_a$ est blanche, et que la dsp du signal modulé se réduit à :

$$\Gamma_x(f) = \left(\sigma_a^2 T_s + |m_a|^2 \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - \frac{n}{T_s}) \right) \cdot |H_e(f)|^2$$

La partie continue du spectre ne dépend plus que de la forme d'onde.

- **Format NRZ (Non Retour à Zéro) binaire (et polaire):** $M = 2$; $A_{mod} = \{-A, +A\}$; $T_s \cdot h_e(\tau) = \text{Rect}_{[0, T_s]}(\tau)$;
Ainsi : $\text{bit } 0 \Rightarrow x^0(t) = -A \cdot \text{Rect}_{[0, T_s]}(t)$ et $\text{bit } 1 \Rightarrow x^1(t) = +A \cdot \text{Rect}_{[0, T_s]}(t)$

En supposant les symboles équiprobables ($p_i = 1/2$) : \Rightarrow

- Moyenne des symboles : $m_a = E\{A_i\} \Rightarrow m_a = 0,5 \cdot (-A) + 0,5 \cdot (+A) = 0$;
- Variance des symboles : $\sigma_a^2 = E\{A_i^2\} - m_a^2 \Rightarrow \sigma_a^2 = 0,5 \cdot (-A)^2 + 0,5 \cdot (+A)^2 = A^2$;
- Energie moyenne par bit de $x(t)$: $E_b = P_{moy}\{x(t)\} \cdot T_b$, $\Rightarrow E_b = A^2 \cdot T_s$, avec $T_s = T_b$;
- DSP du signal modulé : $\Gamma_x(f) = A^2 T_s \cdot \left(\frac{\sin \pi f T_s}{\pi f T_s} \right)^2 = A^2 T_s \cdot [\text{sinc}(\pi f T_s)]^2$

- **Format NRZ M-aire (polaire):** $M = 2^n$; $A_{mod} = A \cdot \{\pm 1; \pm 3; \pm(2p+1); \dots; \pm(M-1)\}$; $T_s \cdot h_e(\tau) = \text{Rect}_{[0, T_s]}(\tau)$;
Ainsi : $x(t)$ est un signal à M niveaux d'amplitudes,

En supposant les symboles équiprobables ($p_i = 1/M$) \Rightarrow

- Moyenne des symboles : $m_a = 0$;
- Variance des symboles : $\sigma_a^2 = A^2 \cdot \frac{2}{M} \cdot \sum_{p=0}^{(M/2)-1} (2p+1)^2 = \frac{M^2-1}{3} \cdot A^2$;
- Energie moyenne par bit du signal $x(t)$: $E_b = \sigma_a^2 \cdot T_s / n$ avec $T_s = n T_b \Rightarrow D_s = D_b / n$
- DSP du signal modulé : $\Gamma_x(f) = \sigma_a^2 T_s \cdot [\text{sinc}(\pi f T_s)]^2$

Conclusion : $\forall M$, la forme de la DSP du format NRZ (bi-polaire) reste la même pour un débit symbole donné.

- **Format NRZ uni-polaire :** $M = 2$; $A_{mod} = \{0, +A\}$; $T_s \cdot h_e(\tau) = \text{Rect}_{[0, T_s]}(\tau)$;
Ainsi : $\text{bit } 0 \Rightarrow x^0(t) = 0$; et $\text{bit } 1 \Rightarrow x^1(t) = +A \cdot \text{Rect}_{[0, T_s]}(t)$

En supposant les symboles équiprobables ($p_i = 1/2$) $\Rightarrow m_a = A/2$; $\sigma_a^2 = (1/4) \cdot A^2$;

Pour des symboles non-corrélés non centrés mais un support de h_e limité à $[0; T_s]$, on a

$$E_s = E\{a^2\} \cdot T_s \cdot \|h_e\|^2 = (1/2) A^2 \cdot T_s, \text{ avec } T_s = T_b; \text{ d'où } E_b = (1/2) A^2 \cdot T_s$$

$$\text{DSP du signal modulé : } \Gamma_x(f) = \left(\frac{A^2}{4} T_s + \frac{A^2}{4} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - \frac{n}{T_s}) \right) \cdot [\text{sinc}(\pi f T_s)]^2 = \frac{A^2}{4} T_s \cdot [\text{sinc}(\pi f T_s)]^2 + \frac{A^2}{4} \cdot \delta(f)$$

\Rightarrow Forme identique au code NRZ bipolaire à la composante continue près.

Note : avec les codes NRZ, il faut éviter les longues suites de symboles au même état (entraînant l'absence de transition pour $x(t)$), sinon problème pour la synchronisation rythme au niveau du récepteur.

- **Format RZ (Retour à Zéro) binaire (et uni-polaire):** $M = 2$; $A_{mod} = \{0, +A\}$, mais avec $T_s \cdot h_e(\tau) = \text{Rect}_{[0, T_s/2]}(\tau)$;
 \Rightarrow Lobes du spectre (partie continue) 2 fois plus large que pour NRZ, présence de raies aux fréquences $(2n+1)/T_s$:

$$\Gamma_x(f) = \left(\frac{A^2}{16} T_s + \frac{A^2}{16} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - \frac{n}{T_s}) \right) [\text{sinc}(\pi f T_s / 2)]^2 = \frac{A^2}{16} T_s [\text{sinc}(\pi f T_s / 2)]^2 + \frac{A^2}{16} \delta(f) + \frac{A^2}{16} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(\frac{2}{\pi})^2}{(2n+1)^2} \delta(f - \frac{2n+1}{T_s})$$

- **Format bi-phase binaire :** $M = 2$; $A_{mod} = \{-A, +A\}$; $T_s \cdot h_e(\tau) = -\text{Rect}_{[0, T_s/2]}(\tau) + \text{Rect}_{[T_s/2, T_s]}(\tau)$;
Ainsi : $\text{bit } 0 \Rightarrow x^0(t) = +A$ pour $t \in [0, T_s/2]$; $-A$ pour $t \in [T_s/2, T_s]$ et $\text{bit } 1 \Rightarrow x^1(t) = -x^0(t)$;

Ce format présente des transitions (utile pour la synchronisation de rythme en réception) quelque soient les symboles

émis, et il est sans composante à la fréquence nulle (car $H_e(f=0) = 0$): $\Gamma_x(f) = A^2 T_s \cdot \frac{(\sin \pi f T_s / 2)^4}{(\pi f T_s / 2)^2}$

II. Traitements de Réception pour un canal à Bruit Blanc Additif Gaussien :

II.1) GENERALITES ET PRELIMINAIRES

II.1.1) Position du problème : recherche d'une détection optimale

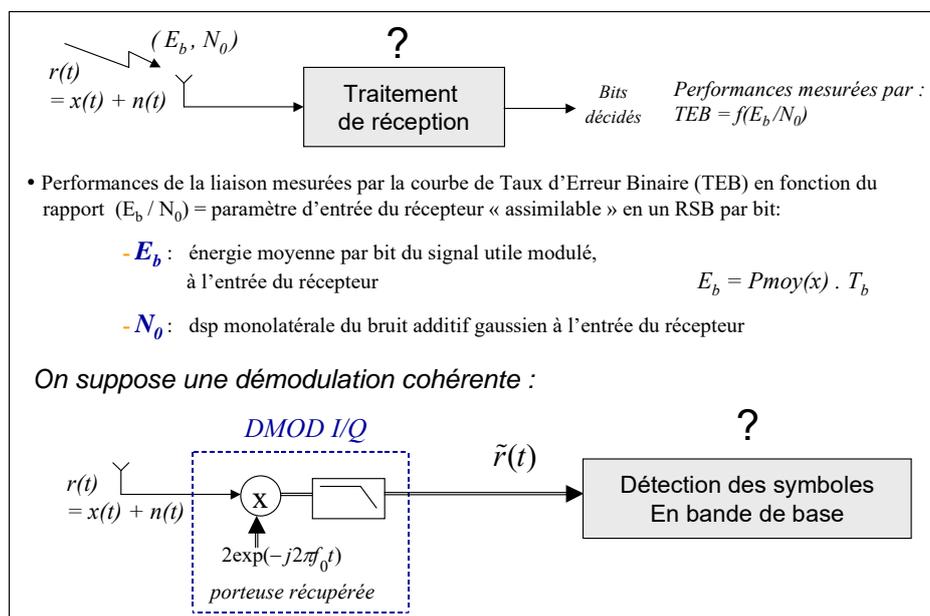


figure 3.2.1 : illustration du problème de détection en réception.

On s'intéresse dans cette dernière partie de chapitre à la définition des paramètres de réception et d'émission en vue d'obtenir des performances optimales (les meilleures possibles) avec un format de modulation donné, et une puissance émise donnée. Universellement dans le secteur des communications numériques, les performances d'un récepteur sont données en terme de Probabilité d'erreur par bit, en fonction du paramètre d'entrée du récepteur, E_b/N_0 , qui est homogène à un rapport signal à bruit par bit (définition plus précise ultérieure).

On se limite ici au cas d'un canal à BBAG, avec implicitement une bande infinie (c'est à dire de fonction de transfert (F.T) $H(f) = 1$, et de réponse impulsionnelle (R.I.) $h(\tau) = \delta(\tau)$), mais nous tirerons les conclusions pour le cas où le canal est plat en fréquence mais à bande limitée ($-B/2$ à $+B/2$ autour de f_0).

A partir du paragraphe II.1.3, on limitera notre étude aux modulations linéaires, et à l'utilisation d'un récepteur linéaire (opérant après démodulation I/Q cohérente). Ce dernier est en effet suffisant pour obtenir les performances optimales pour une modulation linéaire, sous un canal BBAG (uniquement). Avant cela, nous donnons quelques résultats plus généraux (valables pour tous types de modulation) qui nous permettront d'introduire les notions de corrélations et de filtre adapté, qui jouent un rôle fondamental dans les récepteurs.

II.1.2) Résultats généraux de théorie de la détection optimale et notion de filtre adapté (F.A.)

On se limite à l'émission d'un seul signal $\tilde{x}(t)$ de durée T parmi N possibles $\{ \tilde{x}^{(1)}(t), \dots, \tilde{x}^{(N)}(t) \}$, en présence d'un bruit blanc additif Gaussien, et on s'intéresse au Récepteur théorique optimal, permettant de décider au mieux lequel des N signaux a été envoyé.

- Cette situation correspond directement à celle de l'émission d'un symbole unique (alors $N = M$, nombre d'états de modulation possibles du symbole)
- Mais peut facilement s'étendre au cas général de communication numérique (émission successive de symboles, tous les T_s) en considérant que le signal $\tilde{x}^{(i)}(t)$ est construit à partir de la succession des K symboles à M états durant toute la durée T de communication (alors $N = M^K$, et $T = T_{obs}$, de l'ordre de $K.T_s$).

Note : On se place implicitement dans le cas d'une démodulation cohérente en s'intéressant aux enveloppes complexes à la réception $\tilde{r}(t) = \tilde{x}(t) + \tilde{n}(t)$. Ceci n'est nullement une limitation mais permet au contraire une représentation plus efficace du détecteur optimal, en 2 étapes (Demodulation I/Q + Détection en bande de base).

On peut en effet vérifier que si on appliquait les résultats de la détection optimale directement au signal réel $r(t) = x(t) + n(t)$ (autour de la f. porteuse $\pm f_0$), la structure à corrélation avec les différents $x^{(i)}(t)$ masquerait sur chaque branche des opérations préalables de démodulation I/Q, que l'on peut donc mettre en commun.

A) Critère pour Récepteur théorique optimal : (cas de l'émission d'un seul signal ou symbole)

Détection optimale (1)

- **Emission d'un signal de durée T parmi N possibles :** $\tilde{x}(t) \in \{ \tilde{x}^{(1)}(t), \tilde{x}^{(2)}(t), \dots, \tilde{x}^{(N)}(t) \}$
 \Leftrightarrow le signal numéro « i » est émis, parmi N possibles ($1 \leq i \leq N$)
- **Observation à la réception du signal bruité :** $\tilde{r}(t) = \tilde{x}(t) + \tilde{n}(t)$
 où $\tilde{n}(t)$: BBAG complexe, dsp bilatérale $2N_0$,
 \Rightarrow A décider quel signal a été émis, soit: choix de l'indice \hat{i} parmi N ?

• **critère du Maximum à Postérieur (MAP):** le récepteur optimal qui maximise la probabilité d'une décision correcte conditionné par l'observation, choisit l'indice « \hat{i} » tel que:

$MAP: \hat{i} = \text{Arg max} \text{ Prob } \{ \tilde{x}^{(i)}(t) / \tilde{r}(t) \}$

→ Prob. Conditionnelle à postérieur

si signaux équiprobables (après codage de source), critère MAP revient (th. de Bayes) au critère MV:

- **critère du Maximum de Vraisemblance (MV):** choix de « \hat{i} » tel que :

$MV: \hat{i} = \text{Arg max} \text{ Prob } \{ \tilde{r}(t) / \tilde{x}^{(i)}(t) \}$

Prob. de transition, ou conditionnelle à priori (fonction de vraisemblance)

Détection optimale (2)

- **critère MV \Leftrightarrow critère de distance euclidienne minimale entre $\tilde{r}(t)$ et $\tilde{x}^{(i)}(t)$**

le bruit en entrée étant blanc et gaussien, la théorie de la détection permet de montrer que le signal à choisir est celui qui est le plus proche au sens de la distance euclidienne, du signal bruité reçu.

Soit à **minimiser selon « i » la métrique :**

$$d_{(i)}^2 = \left\| \tilde{r}(t) - \tilde{x}^{(i)}(t) \right\|^2 = \int_0^T |\tilde{r}(t) - \tilde{x}^{(i)}(t)|^2 dt \quad (2)$$

\Rightarrow 1^o manière de concevoir le récepteur optimal : par calcul des N distances

entre signal bruité reçu et N signaux possibles, et choix de l'indice \hat{i} associé à la distance **MIN**.

Note: calcul de distance euclidienne (2) entre $\tilde{r}(t)$ et $\tilde{x}^{(i)}(t)$ peut se faire à partir des composantes respectives $\{r_{[n]}, n = 1 \dots D\}$ et $\{x_{[n]}^{(i)}, n = 1 \dots D\}$ obtenues dans n'importe quelle base orthogonale de l'espace des signaux

Éléments de démonstration: expression du signal et du bruit sous forme géométrique (Cf chapitre II, par IV.2.a) comme des vecteurs à D composantes dans une base de l'espace des signaux (D = 2.B.T si signaux $x^{(i)}(t)$ à bande limitée B). Ainsi $\underline{r} = \underline{x}^{(i)} + \underline{n}$, traité comme un vecteur aléatoire à D composantes Gaussiennes indépendantes, avec:

$$p(\underline{r} | \tilde{x}^{(i)}) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right)^D \exp \left\{ -\sum_{n=1}^D \frac{[r_{[n]} - x_{[n]}^{(i)}]^2}{2\sigma^2} \right\} = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right)^D \exp \left\{ -\frac{1}{2N_0} \int_0^T |\tilde{r}(t) - \tilde{x}^{(i)}(t)|^2 dt \right\}$$

fonction de vraisemblance $\Lambda(r, (i))$

B) Réalisation sous forme de corrélateurs ou de filtre adaptés

Détection optimale (3)

- En développant la métrique : $-d_i^2 = - \underbrace{\int_0^T |\tilde{r}(t)|^2 dt}_{\text{énergie du signal reçu}} - \underbrace{\int_0^T |\tilde{x}^{(i)}(t)|^2 dt}_{E^{(i)} : \text{énergie du signal } i} + 2 \cdot \underbrace{\text{Re} \left\{ \int_0^T \tilde{r}(t) \cdot \tilde{x}^{(i)*}(t) dt \right\}}_{C_{obs}^{(i)}}$

- ✓ le 1^o terme, $\|r(t)\|^2$, est indépendant du signal à choisir,
- ✓ le 2^o terme, $E^{(i)}$, dépend du choix de « i », mais est indépendant de l'observation,
- ✓ le 3^o terme, $C_{obs}^{(i)}$, est le seul qui dépend de l'observation

- pour maximiser la vraisemblance (minimiser $d_{(i)}^2$), on n'est pas obligé de travailler avec le signal analogique reçu $r(t)$, mais seulement à partir de ses projections (inter-corrélations au retard nul) $C_{obs}^{(i)}$ sur toutes les signaux $x^{(i)}(t)$ possibles \Rightarrow **récepteur à N branches de corrélations**

- ou (équivalent): \Rightarrow **récepteur à N branches de filtres adaptés + échantillonneurs**

En effet de manière générale, une opération d'inter-corrélation (à différents retards τ) avec un signal $x(t)$ peut être réalisée par une opération de filtrage, adapté à x , c'est à dire de R.I: $x^H(t) = x^*(-t)$:

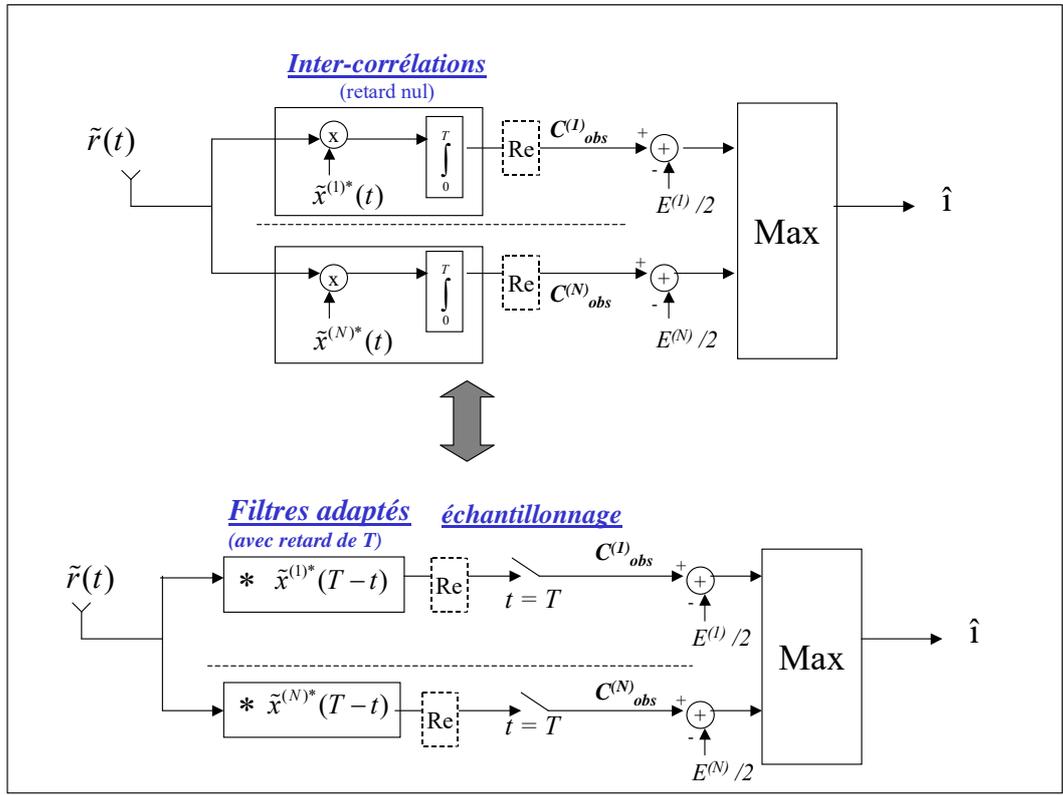
$$\gamma_{\tilde{r}, \tilde{x}}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{r}(u) \cdot \tilde{x}^*(u - \tau) du = (\tilde{r} * \tilde{x}^H)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{r}(u) \cdot \tilde{x}^H(t - u) du$$

en substituant τ et t

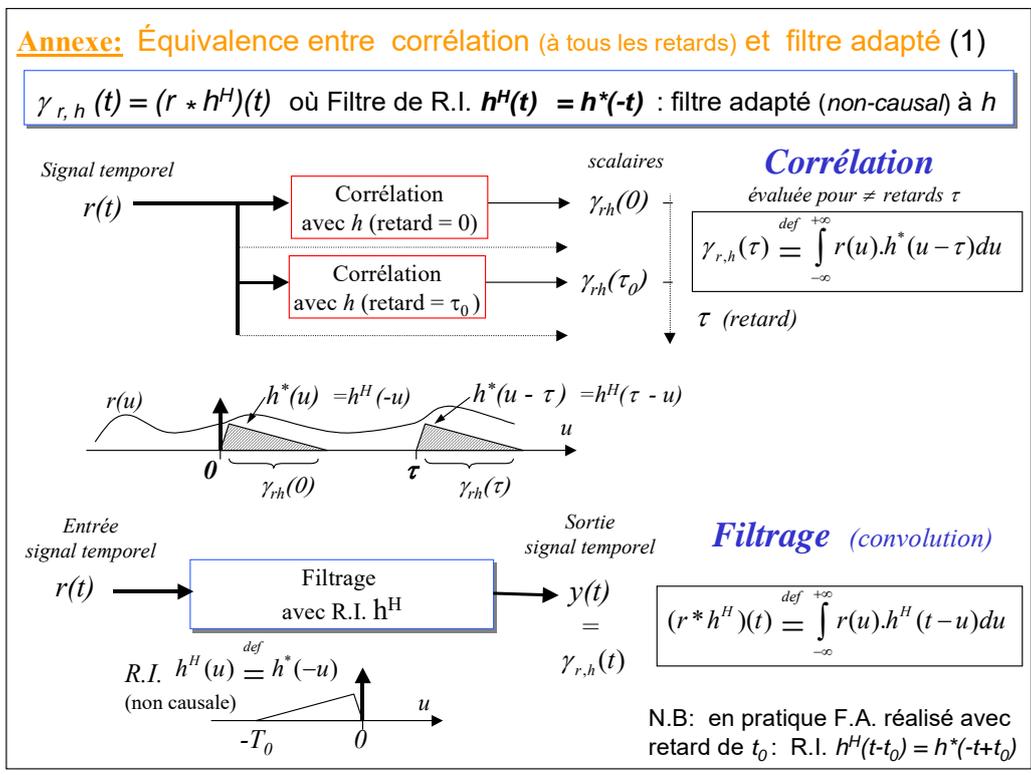
En particulier:

inter-corrélation avec x au retard nul ($\tau = 0$) = sortie du filtre de R.I. x^H , échantillonnée en $t = 0$

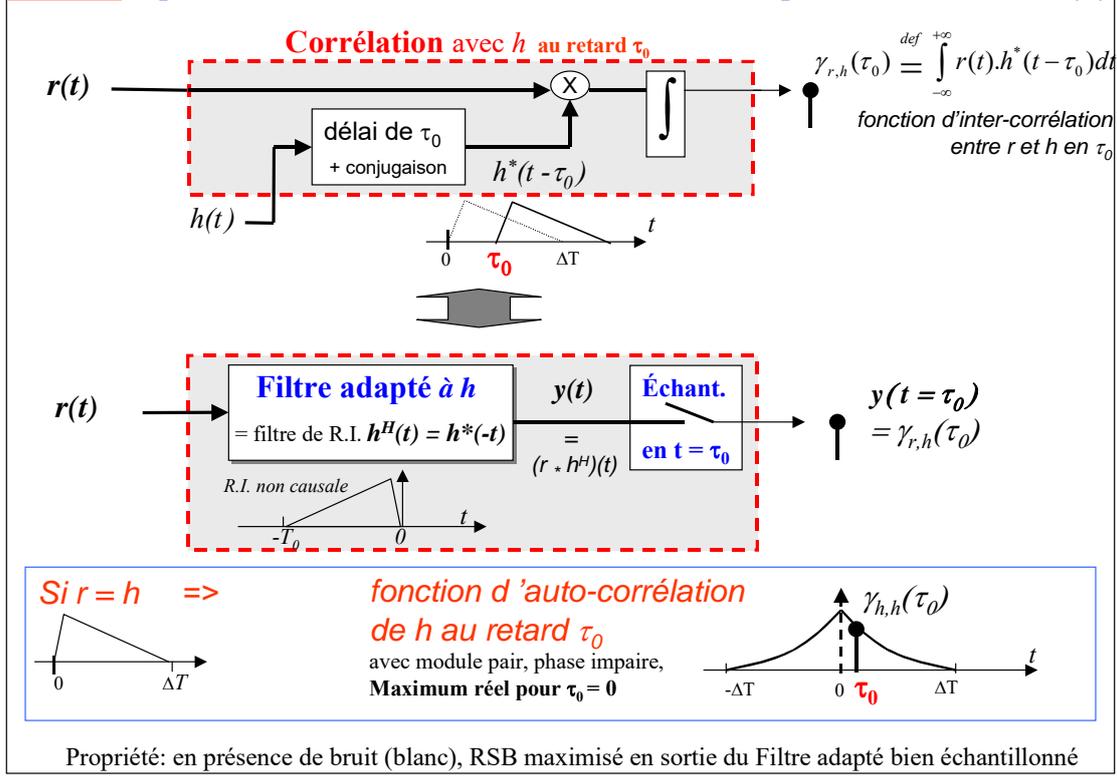
En pratique: filtrage, avec RI causale (retardée de T): $x^*(T-t) \Rightarrow$ sortie filtre échantillonnée en **$t = T$**



Annexe : équivalence entre corrélation (calculée pour tous les retards) et filtrage (adapté).



Annexe: Equivalence entre corrélation (au retard τ_0) et filtre adapté (et échantillonnage en $t=\tau_0$) (2)



C) Simplification de la solution générale en cas d'utilisation d'une fonction de mise en forme linéaire unique commune à tous les signaux

Lorsque les N signaux ne sont pas quelconques, mais construits à partir d'une fonction de mise en forme unique, multipliée par un symbole (choisi parmi N possibles), la solution générale du récepteur optimal se simplifie : il n'y a besoin de réaliser que la corrélation (ou filtre adapté + échantillonnage) avec la fonction de mise en forme, et d'utiliser la sortie comme une variable de décision (pour décider lequel des N symboles possibles est le plus proche ?). Ce cas est le cas de base (lorsqu'un seul symbole est envoyé) de celui des modulations linéaires, et la solution sera étudiée en détail dans la suite du chapitre. Nous donnons ici seulement une illustration de la simplification.

Exemple : $N = 2$ signaux antipodaux et Propriété du filtre adapté :

Soit l'émission d'une impulsion $x^{(1)}(t) = A \cdot Ts \cdot \text{he}(t)$ ou de son opposée $x^{(2)}(t) = -A \cdot Ts \cdot \text{he}(t)$.

Après Modulation I/Q et démodulation I/Q cohérente, on a sur la voie I le modèle d'observation :

$$r_I(t) = a \cdot Ts \cdot \text{he}(t) + n_I(t), \text{ où } n_I(t) \text{ BBAG (DSP bilatérale } N_0), \text{ et symbole } a \in \{-A; +A\}$$

Pour minimiser la probabilité d'erreur sur la décision du symbole, on a d'après les résultats généraux seulement besoin de faire une corrélation (ou filtre adapté + échantillonnage) avec $\text{he}(t)$ à la réception, et décider ensuite l'état du symbole par seuillage (seuil nul si les 2 signaux sont équiprobables).

Cet exemple (Cf figure suivante) permet d'illustrer les propriétés du filtre adapté, qui seront développées en II.3.b.

D) Annexe :

En effet du moment que $r_I(t)$ est traité par filtrage (R.I. $h_r(t)$) et échantillonnage au temps $t_0 = 0$:

$$\text{variable de décision : } y_I = (r * h_r)(t_0) \text{ en } t_0 = 0; \Rightarrow y_I = a \cdot \lambda + b$$

où $b = (n_I * h_r)(0)$: V.A. gaussienne centrée, et coefficient $\lambda = Ts \cdot (\text{he} * h_r)(t=0)$

On montrera que la probabilité d'erreur est fonction décroissante du RSB sur la variable de décision, exprimée par :

$$\text{RSB}_{y_I} = A^2 \cdot \lambda^2 / E\{b^2\}, \text{ qui dépend du choix du filtre } h_r(t)$$

Propriétés du filtre adapté: en prenant $h_r(t) = h_e^H(t) = h_e^*(-t)$

- **Maximisation du rapport signal / bruit** à l'instant de décision $t_0 (=0)$, $RSBy_1$

Avec le filtre adapté, on a : $\lambda = Ts \cdot \|h_e\|^2$ et $E\{b^2\} = N_0 \cdot \|h_e\|^2$

ce qui permet de maximiser $RSBy_1$

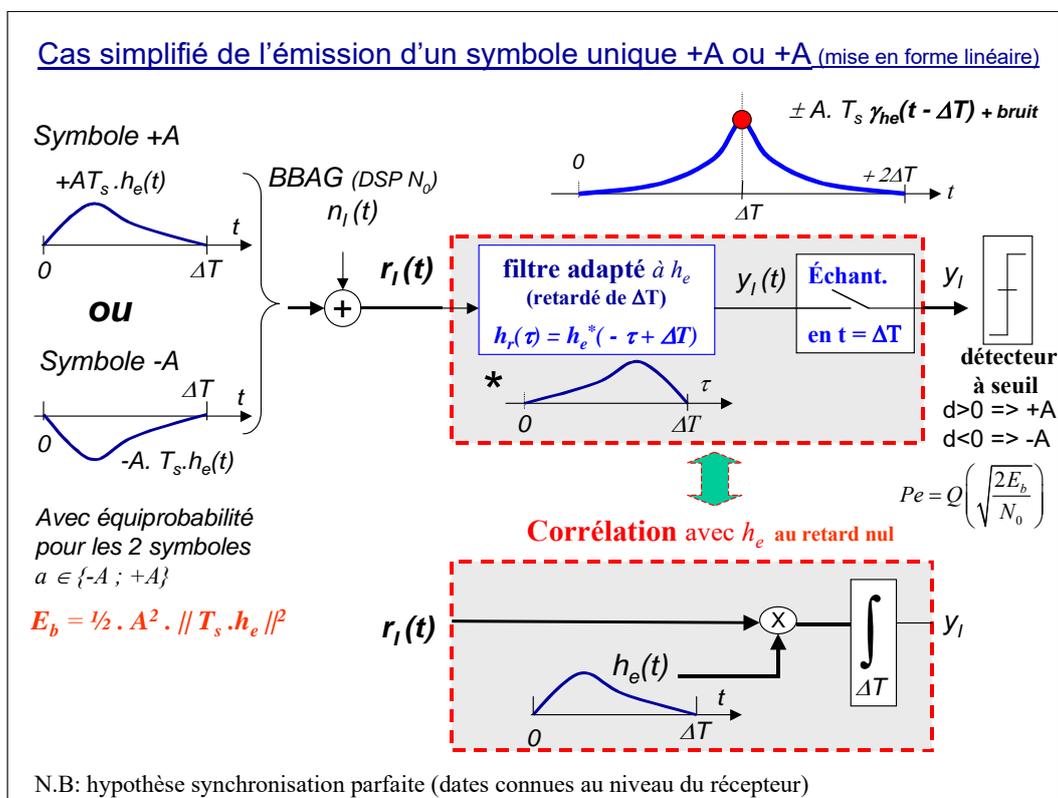
qui vaut $2E_b/N_0$ (cas de symboles binaires antipodaux transmis sur fréquence porteuse)

- **Fonction de Transfert du filtre adapté** $H_r(f) = H_e^*(f)$

Module identique à celui du filtre initial

Phase anti-symétrique => compensation de phase en sortie, $H_r(f) \cdot H_e(f) = |H_e(f)|^2$ réel

En pratique, on prendra un délai de $t_0 = \Delta T$ pour réaliser le filtre adapté, afin qu'il soit causal, et donc l'échantillonnage aura lieu avec le même délai de $t_0 = \Delta T$



II.1.3) Etude du récepteur linéaire cohérent (en Modulation linéaire)

Le problème traité et sa résolution sont similaires (mais avec des signaux complexes) au cas de la transmission en bande de base, vue en 1^o année. On pourra ici travailler à partir des équivalents en bande de base de la chaîne de transmission.

A l'émission :

- Signal réel émis (autour de f_0) : $x(t) = \text{Re}\{\tilde{x}(t) \cdot \exp(j2\pi f_0 t)\}$ avec $\tilde{x}(t) = T_s \cdot \sum_m \tilde{a}_{[m]} \cdot h_e(t - mT_s)$

où $\tilde{a}_{[m]}$ est le symbole M-aire (réel ou complexe) émis à l'instant mT_s .

- Signal réel reçu : $r(t) = x(t) + n(t)$
 où $n(t)$: BBAG réel de dsp (bi-latérale) $\Gamma_n(f) = N_0/2$, autour de $\pm f_0$.

Rapport (E_b/N_0) à l'entrée du récepteur : Energie moyenne par bit du signal utile modulé / dsp monolatérale du bruit

Par définition (Cf partie I: I.1.2 et I.3.1B) :

$$E_b = P_x \cdot T_b \quad \text{où } P_x : \text{puissance moyenne de } x(t) \text{ à l'entrée du récepteur (autour de } f_0), \quad T_b : \text{temps bit}$$

Notes : - la puissance moyenne P_x est la moitié de la puissance moyenne de l'enveloppe complexe, $P_{\tilde{x}}$.

et $P_{\tilde{x}}$ peut se calculer à partir de sa DSP : $P_{\tilde{x}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_{\tilde{x}}(f) df$

- le rapport (E_b/N_0) peut se traduire (et se mesurer) comme le rapport entre la puissance moyenne du signal utile (complet, dans bande infinie) à l'entrée du récepteur, sur la puissance du bruit, mais cette dernière étant mesurée seulement dans une bande de largeur égale au débit binaire, $1/T_b$, autour de f_0 :

$$\left(\frac{E_b}{N_0}\right) = \frac{P_x}{N_0 \cdot \frac{1}{T_b}}$$

Attention : le rapport (E_b/N_0) est donc différent du Rapport Signal à bruit d'entrée du récepteur, qui dépend de la bande de mesure (prise généralement égale à celle du signal ou supérieure). Le rapport (E_b/N_0) est au contraire indépendant de la bande utilisée pour transmettre les données numériques. On le dénomme parfois Rapport Signal à Bruit par Bit. La comparaison des taux d'erreurs obtenues avec différentes techniques de modulation pour un même (E_b/N_0) est essentielle pour le dimensionnement d'un système de transmission.

A la Réception, on doit prendre des décisions ..., $\hat{a}_{[m-1]}$, $\hat{a}_{[m]}$, $\hat{a}_{[m+1]}$, ... sur les symboles émis ..., $\tilde{a}_{[m-1]}$, $\tilde{a}_{[m]}$, $\tilde{a}_{[m+1]}$, ...

Pour cela, on considère une *démodulation cohérente* et une *structure de réception linéaire*.

- Signal complexe après démodulation I/Q (transposition en bande de base et filtrage passe-bas de fréquence de coupure $f_0/2$) cohérente (c'est à dire utilisant la référence de phase « $2\pi f_0 t$ » correspondant à celle de la porteuse à l'entrée du démodulateur):

$$\tilde{r}(t) = \tilde{x}(t) + \tilde{n}(t) \quad \text{avec } n(t) = \text{Re} \{ \tilde{n}(t) \cdot \exp(j2\pi f_0 t) \}$$

où $\tilde{n}(t) = n_I(t) + j.n_Q(t)$: BBAG complexe, de dsp (bi-latérale) $\Gamma_{\tilde{n}}(f) = 2N_0$ autour de 0 Hz, avec $\Gamma_{n_I}(f) = \Gamma_{n_Q}(f) = N_0$

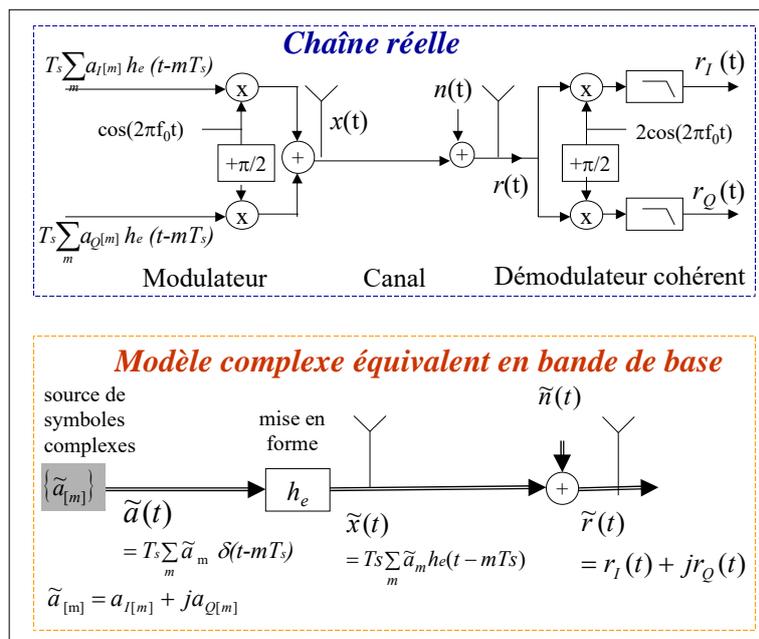


figure 3.2.2 : chaîne de transmission réelle et chaîne équivalente complexe en bande de base (démodulation cohérente)

Le signal complexe $\tilde{r}(t)$ est ensuite traité en bande de base par une *structure de réception linéaire* qui fournit les décisions symbole par symbole, au rythme d'une décision par T_s . La structure de réception est ainsi constituée d'un filtre de réception de RI réelle $h_r(\tau)$ (F.T. $H_r(f)$), d'un échantillonneur de pas d'échantillonnage T_s , et d'un détecteur à seuil (sur la voie réelle et imaginaire) permettant de prendre la décision sur le symbole, et ainsi restituer les M bits correspondants. Pour le cas de symboles MAQ, le circuit de décision correspond à 2 comparateurs qui permettent de prendre les décisions sur les parties réelles ($y_{I[m]}$) et imaginaires ($y_{Q[m]}$) de la variable de décision. Nous verrons dans la suite comment déterminer le filtre de réception et le(s) niveau du seuil pour optimiser la réception.

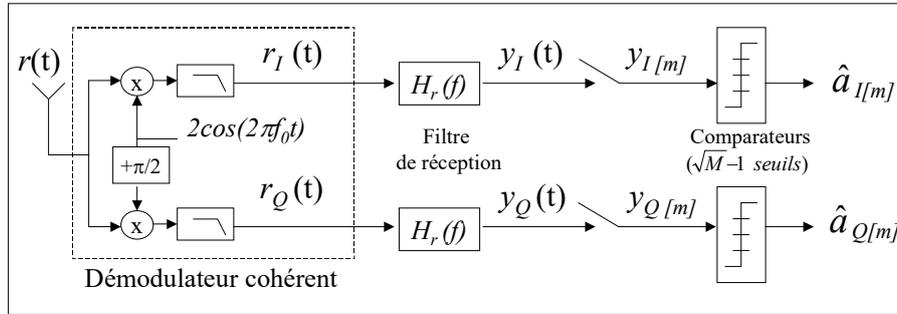


figure 3.2.3 : Récepteur linéaire (représentation réelle) pour une modulation MAQ-M

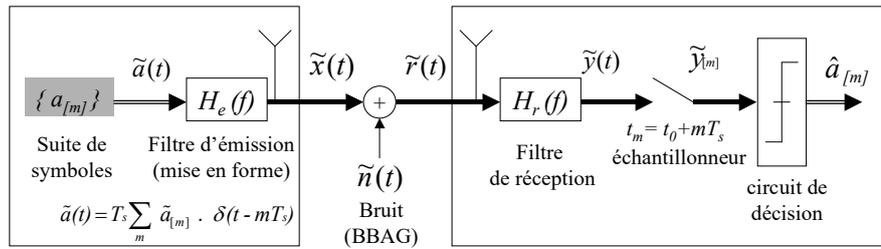


figure 3.2.4 : chaîne de transmission équivalente en bande de base avec récepteur linéaire

Note : sans filtrage de réception, le signal utile serait noyé dans le bruit supposé blanc ...

- Signal complexe après filtrage de réception : $\tilde{y}(t) = T_s \cdot \sum_m \tilde{a}_m \cdot p(t - mT_s) + \tilde{b}(t)$

avec : $p(\tau) = (h_e * h_r)(\tau)$: impulsion (ou forme d'onde) globale émission-réception, représente l'ensemble des filtres entre la source et l'entrée de l'échantillonneur
 $\tilde{b}(t) = (h_r * \tilde{n})(t)$: bruit filtré par $H_r(f)$.

- Après échantillonnage synchrone aux instants $t_m = t_0 + mT_s$:

$$\tilde{y}(t_m) = \tilde{a}_m \cdot p(t_0)T_s + T_s \sum_{n \neq m} \tilde{a}_n \cdot p(t_0 + (m-n)T_s) + \tilde{b}(t_m)$$

$\tilde{y}_m = \tilde{y}(t_m)$: variable de décision (ou symbole estimé)

C'est à partir de l'échantillon d'indice m , $y_{I[m]}$, que l'organe de décision va prendre la décision sur le symbole émis \hat{a}_m (symbole décidé). Il est composé de 3 contributions de natures différentes :

- 1° terme : partie utile pour la décision du symbole d'indice m , pondérée par la forme d'onde globale en $\tau = t_0$.
- 2° terme : due aux symboles antérieurs ou postérieurs, appelé Interférence Entre Symboles (**IES**)
- 3° terme : due au bruit.

La décision se fera d'autant mieux que les termes d'IES et de bruit ont une variance faible comparée au terme contenant le symbole utile. Pour une décision avec des symboles à $N = \sqrt{M}$ états sur chaque voie (I et Q), il faudra généralement fixer $N-1$ seuils qui dépendent des valeurs des différents symboles possibles et de leur probabilité (Cf II.3, seuil nul, c'est à dire décision par prise de signe, pour des symboles équiprobables et antipodaux $\pm A$). La présence ou non d'IES dépend de la caractéristique de l'impulsion globale $p(\tau)$, comme nous le verrons au paragraphe II.2.

Modèle discret équivalent : Etant donné le caractère discret (au temps T_s) de la source de symboles, il est intéressant de remarquer que les échantillons $y_{[m]}$ en sortie de l'échantillonneur peuvent s'écrire comme une convolution discrète des symboles, perturbé par des échantillons de bruit discret :

$$\tilde{y}_{[m]} = p_{[m]} * \tilde{a}_{[m]} + \tilde{b}_{[m]} = \sum_n \tilde{a}_{[n]} \cdot p_{[m-n]} + \tilde{b}_{[m]}$$

$$\text{soit } \tilde{y}_{[m]} = p_{[0]} \tilde{a}_{[m]} + \sum_{n \neq m} \tilde{a}_{[n]} p_{[m-n]} + \tilde{b}_{[m]}$$

Où

- $\{p_{[n]}\}$ est la réponse impulsionnelle du filtre discret (*sans dimension*) appliqué à la source de symboles $a_{[m]}$; elle est obtenue par échantillonnage (période T_s , avec décalage t_0) du filtre analogique $p(\tau)$, soit :

$$p_{[n]} = T_s \cdot p(\tau)_{\tau=t_0+nT_s} = T_s \cdot p(t_0+nT_s)$$

- $\tilde{b}_{[m]} = \tilde{b}(t_m)$ représente la suite d'échantillons de bruits équivalents,

Gaussienne mais pas blanche pour un filtre quelconque de réception $h_r(\tau)$.

Ce modèle est indépendant du théorème d'échantillonnage, qui n'est d'ailleurs généralement pas respecté pour passer du signal continu $\tilde{y}(t)$ aux échantillons $\tilde{y}_{[m]}$. Rappelons que l'on cherche à prendre une décision sur des symboles discrets, et non à préserver ou reconstituer un signal analogique ...

Notes :

- 1) **délai d'échantillonnage t_0** : ce délai est un paramètre important du récepteur, qui doit être réglé conjointement au choix du filtre de réception (en tenant compte du filtre d'émission). Il est nécessairement positif à cause du retard amené par les divers filtres. Pour alléger les notations, de nombreux ouvrages prennent $t_0 = 0$, ce qui revient à avoir une *origine des temps* différente à la réception par rapport à l'émission.
- 2) **synchronisation d'horloge (ou de rythme)** : on suppose que les oscillateurs utilisés à l'émission (horloge de génération des symboles) et à la réception (horloge d'échantillonnage) ont des rythmes symboles $1/T_s$ parfaitement identiques. En pratique, l'horloge de réception est asservie (opération de récupération d'horloge).
- 3) **synchronisation de porteuse (ou de phase)** : pour effectuer la démodulation cohérente, nous avons supposé que l'oscillateur du récepteur, « $2\cos(2\pi f_0 t)$ », était synchronisée en fréquence et en phase sur l'onde de référence à l'entrée du démodulateur (correspondant à celle de l'oscillateur local d'émission, au déphasage de propagation près). En pratique, ceci nécessite une opération de synchronisation appelé récupération de porteuse (ou de phase).

II.2 Elimination de l'Interférence entre symboles – Critère de Nyquist

II.2.a Description de l'IES :

Le terme d'IES qui vient perturber (après échantillonnage) la variable de décision $y_{[m]}$ correspondant au symbole $a_{[m]}$ ($\tilde{y}_{[m]} = p_{[0]} \tilde{a}_{[m]} + IES_{[m]} + \tilde{b}_{[m]}$), a dans le cas le plus général, pour expression :

$$IES_{[m]} = T_s \sum_{n \neq m} \tilde{a}_{[n]} \cdot p(t_0 + (m-n)T_s)$$

L'IES est due aux symboles qui ont été émis avant et après $a_{[m]}$ (selon la forme de l'impulsion et le choix du retard t_0). Il peut être la cause d'une décision erronée (en présence ou non de bruit) et d'une dégradation des performances de Probabilité d'erreur en présence de bruit.

Il y a deux cas *triviaux* pour lesquels le terme perturbateur $IES_{[m]}$ est nul :

- lorsque la transmission ne consiste à envoyer qu'un seul symbole $\tilde{a}_{[m]}$, mais ce n'est pas ce que l'on veut ...
- lorsque l'impulsion globale $p(\tau)$ a une durée inférieure ou égale au temps symbole T_s , puisque alors les impulsions $p(t-mT_s)$ ne se chevauchent pas.

Même si nous avons considéré le cas d'impulsion de durée limitée à T_s pour introduire les modulations, cette solution est très rarement utilisée en pratique (à moins d'une transmission locale par câble par exemple), en raison d'un encombrement spectral infini (Cf I.2.b), qui va à l'encontre d'un partage des ressources fréquentielles. En

théorie, du moment que la R.I. $p(\tau)$ est à durée limitée T_0 , le module au carré de la fonction de transfert $P(f)$ (donc la dsp du signal modulé) est à bande infinie. Ainsi, si on veut se limiter à une bande passante B , l'impulsion de mise en forme devrait avoir une durée infinie. En pratique, du moment que $B.T_0 \gg 1$, on aura tout de même quasiment une bande limitée B et une durée T_0 limitée (*contributions au-delà de T_0 , ou/et de B négligeables*).

Pour éviter une occupation spectrale trop large, on a donc intérêt à ne pas limiter la durée de $p(\tau)$ à T_s , ce qui va nécessairement entraîner des chevauchements entre les impulsions $p(t-mT_s)$ associées aux différents symboles. Cependant, $p(\tau)$ pourra tout de même être judicieusement choisie pour qu'elle n'entraîne pas d'IES aux instants de décision, soit après échantillonnage aux instants t_m .

Notes : mesures pratiques de l'effet de l'IES (sans bruit) obtenue à partir du *diagramme de l'œil* de $y(t)$, ou de la *constellation* de $y_{[m]}$ (Cf figures cours 1^oannée, et TP2a)

II.2.b Elimination de l'IES (Critère de Nyquist)

On remarque que le terme qui traduit mathématiquement l'IES s'annule (\forall les jeux de symboles aléatoires) si la forme d'impulsion globale $p(\tau)$ vérifie la condition suivante, appelée critère de Nyquist :

$$IES = 0 \Leftrightarrow p(t_0 + nT_s) = \begin{cases} p(t_0) & ; n = 0 \\ 0 & ; n \neq 0 \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}$$

Dans ce cas, le terme $y_{[m]}$ contient le symbole désiré $\tilde{a}_{[m]}$ sans IES : $\tilde{y}_{[m]} = T_s.p(t_0).\tilde{a}_{[m]} + \tilde{b}(t_m) = p_{[0]}\tilde{a}_{[m]} + \tilde{b}_{[m]}$

Le filtre global $p(\tau)$ qui représente le « canal » global en bande de base (tout ce qui est compris entre la source de symboles et l'entrée de l'échantillonneur) est appelé filtre de Nyquist lorsqu'il vérifie le critère de Nyquist. On devra donc jouer sur les organes d'émission (h_e) et de réception (h_r) de manière à ce que la réponse impulsionnelle $p = (h_e * h_r)$ totale vérifie le critère de Nyquist.

Exemples : du moment qu'on respecte **les passages par zéro tous les $t_0 \pm mT_s$** , il y en a une infinité de formes pour $p(\tau)$: formes oscillatoires amorties avec un maximum en t_0 , fonction triangle de base $2T_s$, ...

Note : si on prend pour convention $t_0 = 0$, l'impulsion $p(\tau)$ ne sera généralement pas causale (ce n'est pas gênant puisque c'est seulement due au modèle de représentation, en pratique il y aura toujours un retard t_0 non nul ...).

Critère de Nyquist en fréquence : équivalence du critère de Nyquist dans le domaine fréquentiel, avec $P(f) = TF\{p(t)\}$:

$$IES = 0 \Leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} P(f - \frac{n}{T_s}).\exp\{j2\pi t_0(f - \frac{n}{T_s})\} = \text{constante} \quad \forall f \in \mathfrak{R}$$

la valeur de la *constante* de normalisation est : $p(t_0).T_s$

Démonstration (en raisonnant à temps continu) :

Le critère de Nyquist en temps peut se formuler à l'aide du peigne de Dirac ($\Psi_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s)$), et de la RI (non-causale) du filtre $p(t)$ avancée de t_0 , $p^{(t_0)}(t) = p(t + t_0)$: $p^{(t_0)}(t).T_s.\Psi_{T_s}(t) = p^{(t_0)}(0).T_s.\delta(t) = p(t_0).T_s.\delta(t)$

Par transformée de Fourier, en utilisant le fait que $TF\{\Psi_{T_s}(t)\} = \frac{1}{T_s}.\Psi_{\frac{1}{T_s}}(f) = \frac{1}{T_s}.\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - \frac{n}{T_s})$, on obtient :

$$P^{(t_0)}(f) * \Psi_{\frac{1}{T_s}}(f) = p(t_0).T_s \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} P^{(t_0)}(f - \frac{n}{T_s}) = p(t_0).T_s, \text{ avec } \underline{P^{(t_0)}(f) = P(f).\exp(j2\pi t_0 f)}, \text{ d'où le résultat.}$$

Note : en utilisant le formalisme des signaux échantillonnés, le critère de Nyquist s'obtient directement:

En temps : $p_{[n]} = T_s \cdot p(\tau)_{|t=t_0+nT_s} = p_{[0]} \cdot \delta_{[n]}$ avec $p_{[0]} = p(t_0)T_s$

En fréquence : $P^{ech}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} P^{(t_0)}(f - \frac{n}{T_s}) = p_{[0]}$ avec $P^{(t_0)}(f) = P(f) \cdot \exp(j2\pi t_0 f)$, où $P(f) = TF\{p(\tau)\}$

Si on prend pour convention $t_0 = 0$, le critère se simplifie puisque $P^{(t_0)}(f) = P(f)$.

Le critère de Nyquist traduit simplement la nécessité d'avoir une R.I. du canal discret global équivalent $p_{[n]}$ (Cf modèle discret équivalent en II.1) en forme de suite de kronecker (« dirac discret »), ce qui correspond bien à avoir une fonction de transfert pour le filtre discret $P^{ech}(f)$ constante. On peut considérer $P^{ech}(f)$ seulement sur une plage de fréquence de largeur $1/T_s$, étant donné sa périodicité. $P^{ech}(f)$ peut être calculée de manière équivalente (Cf cours de traitement du signal) par repliement de la fonction de transfert analogique $P^{(t_0)}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} p^{(t_0)}(\tau) \cdot \exp(-j2\pi f \tau) d\tau$, ou

directement à partir des échantillons : $P^{ech}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p_{[n]} \cdot \exp(-j2\pi f n T_s)$.

Conséquences du critère de Nyquist :

1) **forme de la fonction de transfert analogique $P(f)$** : le filtre global analogique $P(f)$ n'amène pas d'IES si et seulement si le résultat du repliement $P^{ech}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} P^{(t_0)}(f - \frac{n}{T_s})$ (superposition des motifs $P(f) \cdot \exp(j2\pi f t_0)$ décalés tous les $1/T_s$) donne un résultat constant en fonction de la fréquence, f .

Le cas le plus courant dans la pratique est celui où $P(f) = 0$ pour $|f| > 1/T_s$. On a alors seulement 2 motifs qui se chevauchent pour $0 < f < 1/2T_s$, avec la symétrie : $p_{[0]} = P^{(t_0)}(f) + P^{(t_0)}(f - 1/T_s)$
De plus, comme $p(\tau)$ est réel, $P^{(t_0)}(f) = P^{(t_0)*}(-f)$, et on a en particulier $Re(P^{(t_0)}(1/2T_s)) = 0,5 \cdot P^{(t_0)}(0)$.

Figure

2) **Bande minimale pour transmettre :**

- on constate à partir de l'expression en fréquence (ou de la figure), que le critère de Nyquist ne pourra pas être vérifié que si la bande passante $B/2$ de $P(f)$ (et donc de $He(f)$ puisque $P(f) = He(f) \cdot Hr(f)$) est supérieure à $0,5/T_s$, car dans le cas contraire, le repliement $P^{ech}(f)$ serait nul en $f = 0,5/T_s$.
- Ainsi les signaux réels en bande de base, $x_I(t)$ et $x_Q(t)$ doivent occuper (pour des symboles complexes) au minimum la bande $[-1/2T_s ; 1/2T_s]$ pour une transmission sans IES.
- Ce constat est très important pour déterminer la relation entre la largeur de bande nécessaire du signal modulé, B (en Hz) et le débit symbole (= Rapidité de modulation, en symb/sec) :

$$B \geq \frac{1}{T_s} = D_s$$

La largeur $1/T_s$ (en bande transposée) est la bande minimale autour de f_0 pour la transmission sans IES.

Note : à première vue, il semble que la transmission sur fréquence porteuse utilise moins bien le spectre que la transmission en bande de base, qui nécessite (dans les fréquences positives) une bande deux fois moins grande, égale à $D_s/2$. En fait il n'en est rien, puisque les symboles sont nécessairement réels pour une transmission sans porteuse, alors qu'ils sont ici à dimension double (complexes). Pour le cas particulier de symboles réels et transmission sur porteuse, on pourrait employer des transformations supplémentaires (filtrage en bande de base à réponse impulsionnelle complexe, ou filtrage passe-bande non-symétrique autour de f_0) par rapport au schéma de base, pour transmettre sans IES dans une largeur de bande $D_s/2$.

Autre propriété adoptée en pratique (mais non obligatoire pour respecter le critère de Nyquist !) :

Si de plus le filtre $P(f)$ est choisi à phase linéaire : $P(f) = |P(f)| \cdot \exp(-j2\pi t_0 f)$

Dans ce cas (propriété des filtres à phase linéaire), la R.I. réelle $p(t)$ a alors une symétrie paire par rapport à t_0 :

$p(t+t_0) = p(-t+t_0)$, et le Critère de Nyquist en fréquence devient : $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |P(f - \frac{n}{T_s})|^2 = \text{constante}$

En effet, $P^{(t_0)}(f) = |P(f)|$ étant réel, et pair (puisque R.I. réelle), $P^{(t_0)}(t) = TF^{-1}\{P^{(t_0)}(f)\}$ est réelle et paire :

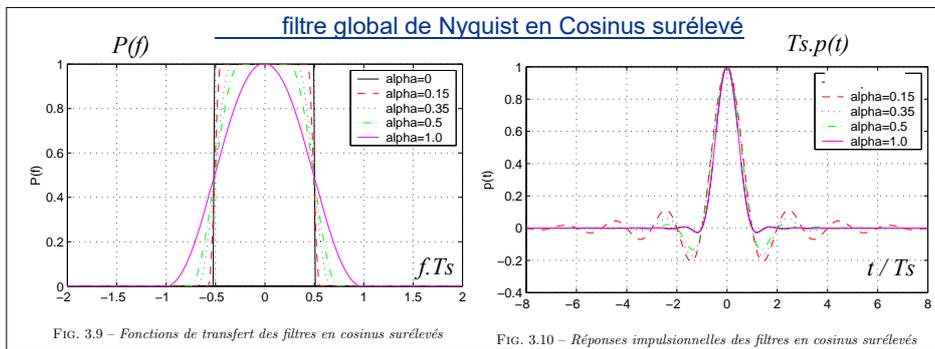
$P^{(t_0)}(t) = P^{(t_0)}(-t)$. Or la R.I. $p(t)$ est obtenu par retard pur de t_0 de la R.I. $P^{(t_0)}(t)$, soit $p(t) = P^{(t_0)}(t - t_0)$

Exemple : **filtre de Nyquist en cosinus surélevé** pour la fonction de transfert globale émission-réception $P(f)$.
 = filtrage global le plus utilisé en pratique (avec approximation à durée finie sur 8 à 16 T_s pour $p(t)$)

$$|P(f)| = \begin{cases} 1 & \text{pour } |f| < \frac{1-\alpha}{2T_s} \\ \frac{1}{2} \left(1 - \sin \frac{\pi T_s}{\alpha} \left(f - \frac{1}{2T_s} \right) \right) & \text{pour } \frac{1-\alpha}{2T_s} < |f| < \frac{1+\alpha}{2T_s} \\ 0 & \text{pour } |f| > \frac{1+\alpha}{2T_s} \end{cases} \quad \text{et } P(f) = |P(f)| \cdot \exp(-j2\pi_0 f)$$

avec : α = « excès de bande » (choisi entre 0 et 100%), ou « facteur de retombée » (« roll-off » en anglais) ;

On a donc un filtre à phase linéaire, ce qui implique une réponse impulsionnelle de symétrie paire autour de t_0 .



Figures extraites du cours ENST de R. Vallet

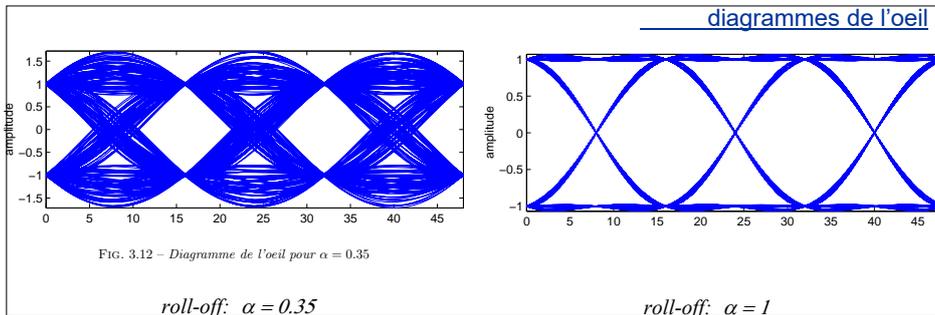


Figure 3.2.5 : $P(f)$ et $T_s.p(t)$ d'un filtre de Nyquist en Cosinus Surélevé pour différents facteurs de retombée α (figures avec convention, $t_0=0$, et $T_s=1$)

II.3 Répartition optimale du filtrage sur la chaîne Emission / Réception et performances

On pourrait démontrer directement que pour un rapport E_b/N_0 donné, les performances optimales sur la chaîne (Probabilité d'erreur minimale) sont obtenues lorsqu'on choisit les filtres d'émission $He(f)$ et de Réception $Hr(f)$ satisfaisant **à la fois** les 2 conditions (Cf cours 1^o année):

- (1) le filtre global $P(f) = He(f) \cdot Hr(f)$ est un filtre de Nyquist
- (2) le filtre $Hr(f)$ est adapté (avec retard t_0) à $He(f)$, tel que $Hr(f) = He^*(f) \cdot \exp(-j2\pi f t_0)$

La condition (1) correspond à l'absence d'IES ;

La condition (2) correspond à la maximisation du rapport signal à bruit sur la variable de décision (à Puissance utile reçue constante) ;

Ces performances optimales correspondent en fait à celles qu'on obtiendrait ($TEB = f(E_b/N_0)$) avec l'émission d'un seul symbole, ou encore avec l'émission d'une succession de symboles qui ne se chevaucheraient pas (donc Bande infinie).

Au lieu d'établir directement ce résultat, nous allons dans la suite suivre la démarche suivante :

Supposant l'absence d'IES (donc sous contrainte que (1) est vérifié), nous allons montrer que la probabilité d'erreur est minimum ssi la condition (2) est vérifiée. On peut ensuite conclure que la solution trouvée est bien optimale, puisque le Taux d'erreur obtenu en fonction de E_b/N_0 correspond au Taux d'erreur minimum atteignable lorsque un seul symbole est envoyé (on ne peut pas espérer faire mieux dans le cas de symboles successifs à cause du terme potentiel d'IES).

Nous donnons ici la démarche résumée (cf annexe II.3.A pour plus de détail) de l'établissement des performances en **BPSK**, en supposant les *symboles équiprobables*.

II.3.a) Décision en présence de bruit : expression de la probabilité d'erreur en fonction de la variance de bruit pour une chaîne sans IES

En supposant que le critère de Nyquist est vérifié pour le filtrage global $p(\tau)$, la variable de décision est :

$$\tilde{y}_{[m]} = \tilde{a}_{[m]} \cdot \lambda + \tilde{b}_{[m]}$$

Le bruit $\tilde{b}_{[m]} = (h_r^* \tilde{n})(t)|_{t=tm}$ est une variable aléatoire complexe gaussienne centrée (en tant que filtré de $\tilde{n}(t)$ qui est Gaussien centré), de variance $\sigma_b^2 = E\left\{|\tilde{b}_{[m]}|^2\right\}$, et le coefficient $\lambda = Ts.p(t_0)$.

On se place dans le cas de *symboles binaires antipodaux* ($a_{[m]} \text{ réel } \in \{-A, +A\}$) de probabilités respectives $\{p_0, p_1\}$;

La décision se fait seulement à partir de la voie en phase (voie réelle) : $y_{I[m]} = a_{[m]} \lambda + b_{I[m]}$

où le bruit réel gaussien $b_I(t)$ a pour densité de probabilité (ddp) : $p(b_I) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_{b_I}} \exp\left\{-\frac{(b_I / \sigma_{b_I})^2}{2}\right\}$,

et pour variance $\sigma_{b_I}^2 = E\{|b_{I[m]}|^2\} = \sigma_b^2 / 2$. Soit : $\sigma_{b_I}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_{b_I}(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_{n_I}(f) \cdot |H_r(f)|^2 df = N_0 \int_{-\infty}^{+\infty} |H_r(f)|^2 df$

Avec des symboles binaires, la règle de décision consiste à comparer à un seuil unique s :

Règle de décision :
 $si \ y_{I[m]} < s \Rightarrow \hat{a}_{[m]} = -A$
 $si \ y_{I[m]} > s \Rightarrow \hat{a}_{[m]} = +A$

Si les symboles sont *équiprobables* ($p_0 = p_1 = 1/2$), le seuil optimal est nul ($s = 0$) et la décision consiste simplement à observer le signe de la variable de décision $y_{I[m]}$, (cf annexe I.3.A), avec pour probabilité d'erreur par bit :

$$Pe = Q\left(\frac{A \cdot \lambda}{\sigma_{b_I}}\right)$$

où $Q(\cdot)$ est le complément à 1 de la fonction de répartition de la loi normale : $Q(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$

La probabilité d'erreur s'exprime donc comme une fonction extrêmement décroissante (fonction $Q(\cdot)$) du rapport $\frac{A^2 \lambda^2}{\sigma_{b_I}^2}$. Sous l'hypothèse d'une chaîne sans IES ($p(\tau)$ respecte le critère de Nyquist), on a donc toujours :

$$Pe = Q\left(\sqrt{RSB_y}\right) \quad \text{où} \quad RSB_y = \frac{E\left\{|\lambda \cdot a_{I[m]}|^2\right\}}{E\left\{|b_{I[m]}|^2\right\}} = \frac{A^2 \lambda^2}{\sigma_{b_I}^2}$$

RSB_y : Rapport Signal à Bruit au niveau de la variable de décision (après l'échantillonneur), $y_{I[m]} = \lambda \cdot a_{[m]} + b_{I[m]}$.

II.3.b Equi-répartition optimale du filtrage entre Emission et Réception

Pour une chaîne sans IES, voyons maintenant comment répartir optimalement le filtrage global de Nyquist entre l'émission et la réception. Le couple de filtres ($H_e(f)$, $H_r(f)$) qui permet, pour une **puissance moyenne du signal utile (P_x) fixée à l'entrée du récepteur**, de minimiser la probabilité d'erreur est donc celui qui permet de maximiser le rapport signal à bruit sur la variable de décision, ou encore de maximiser le rapport λ / σ_b . Rappelons que :

$$\lambda = T_s \cdot p(t_0) = T_s \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{H_e(f)H_r(f)}_{P(f)} \cdot \exp(+j2\pi ft_0) df$$

$$\sigma_{bi}^2 = N_0 \int_{-\infty}^{+\infty} |H_r(f)|^2 df$$

$$\text{sachant que } P_x = \frac{1}{2}(A^2 T_s) \int_{-\infty}^{+\infty} |H_e(f)|^2 df \text{ est constant.}$$

$$\text{L'inégalité de Schwartz permet d'écrire : } [p(t_0)]^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |H_e(f) \cdot \exp(+j2\pi ft_0)|^2 df \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |H_r(f)|^2 df$$

où l'égalité est vérifiée pour : $H_r(f) = cte \cdot H_e^*(f) \cdot \exp(-j2\pi ft_0)$, cte étant une constante.

$$\text{On peut en déduire : } \left[\frac{p(t_0)}{\sigma_{bi}} \right]^2 \leq \frac{1}{N_0} \int_{-\infty}^{+\infty} |H_e(f)|^2 df$$

On constate que le membre de droite, proportionnel à P_x , ne dépend ni de la fonction à optimiser $H_r(f)$, ni de la constante cte à laquelle on donne la valeur 1. Par conséquent le rapport $p(t_0)/\sigma$ (et donc λ / σ) est maximum lorsque l'égalité est vérifiée.

Le filtre de réception qui maximise le Rapport Signal à Bruit sur la variable de décision, et ainsi (en absence d'IES) minimise la probabilité d'erreur, est donc le filtre adapté au filtre d'émission (avec délai t_0):

$$H_r(f) = H_e^*(f) \cdot \exp(-j2\pi ft_0), \quad \text{soit pour la R.I. : } h_r(\tau) = h_e^*(t_0 - \tau)$$

Le filtre $h_e^*(t_0 - \tau)$ est en effet le filtre adapté (retardé de t_0) à l'impulsion $h_e(\tau)$. Il a un module en fréquence identique à celui de $H_e(f)$, mais une phase de signe opposée, corrigée par le déphasage linéaire avec la fréquence, $-2\pi ft_0$ (due au retard t_0).

Nous traitons ici le cas où la R.I. $h_e(\tau)$ est réelle, et le filtre adapté (retardé) est alors $h_e(-\tau + t_0)$.

Le filtre adapté à la mise en forme permet de maximiser le RSB en sortie.

En respectant cette equi-répartition des filtres, le filtre global $P(f) = |H_e(f)|^2 \cdot \exp(-j2\pi ft_0)$ est à phase linéaire.

Notes :

1- Avec la convention $t_0 = 0$, $h_r(\tau)$ est le filtre adapté (sans retard) à $h_e(\tau)$, que l'on peut noter $h_e^H(\tau) = h_e^*(-\tau)$, et qui correspond au « miroir » (ou « retourné ») du filtre initial. Le filtre adapté $h_e^H(\tau)$ est évidemment anti-causal. Pour le rendre causal, lors de la réalisation, le retard introduit t_0 (qui correspond au retard introduit dans l'échantillonnage) est égal au support temporel de $h_e(\tau)$. Le filtre de réception devient alors $h_e^H(\tau - t_0) = h_e^*(t_0 - \tau)$ qui est causal.

2- Equivalence Filtrage adapté-Corrélation (CF II.1.2): appliquer à $r_I(t)$ le filtrage adapté à $h_e(\tau)$ est équivalent à faire

$$\text{la corrélation entre } r_I(t) \text{ et } h_e(\tau) : y_I(t) = (h_e^H * r_I)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} r_I(\tau) \cdot h_e^H(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} r_I(\tau) \cdot h_e^*(\tau - t) d\tau = C_{r_I, h_e}(t)$$

En particulier, l'auto-corrélation (déterministe) du filtre est donnée par $C_{h_e}(\tau) = (h_e * h_e^H)(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_e(t) \cdot h_e^*(t - \tau) dt$, maximale en 0.

Ainsi, avec le filtre de réception optimal, l'impulsion $p(\tau) = C_{h_e}(\tau - t_0)$ concentre l'énergie aux instants de décision.

Et le filtre de Nyquist global (émission-réception) à une R.I. $p(t)$ paire par rapport à son milieu, correspondant à une fonction de transfert nécessairement à phase linéaire : $P(f) = |H_e(f)|^2 \cdot \exp(-j2\pi ft_0)$,

3- Avec un canal non-idéal, le filtre global de transmission a un équivalent en bande de base (ou enveloppe complexe) qui peut être complexe (si il contient la « transposition » d'un filtre passe-bande).

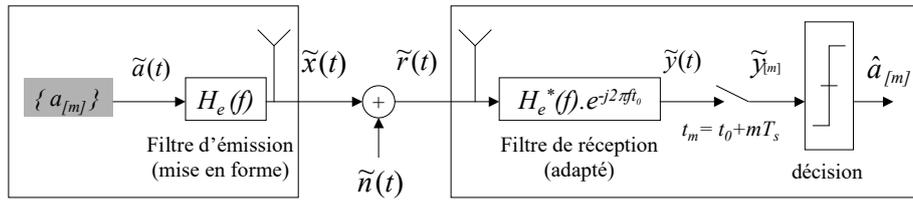


figure : équi-répartition optimale du filtre de Nyquist $P(f)$ entre émission et réception (pour le cas BPSK, la décision n'est prise que sur la partie réelle, $y_{l[m]}$)

Commentaires :

1) les meilleures performances sont donc obtenues avec un filtrage de Nyquist équi-réparti entre l'émission et la réception (module $|H_r(f)|=|H_e(f)|$), au point d'injection du bruit $n(t)$. On aurait pu assurer l'absence d'IES avec un partage différent, mais avec des performances moins bonnes en présence de bruit, pour un rapport E_b/N_0 donné. Cas extrêmes très mauvais : tout le filtrage de Nyquist $P(f)$ en émission (\Rightarrow variance de bruit σ_b^2 infinie !), ou tout le filtrage en réception ($\Rightarrow E_b$ infini !)

2) On utilise en général, pour l'émission $H_e(f)$ et la réception $H_r(f)$, des filtres $\frac{1}{2}$ Nyquist identiques, de modules en fréquence égaux à $\sqrt{|N(f)|}$ où $N(f)$ est un filtre de Nyquist, et de phase linéaire avec la fréquence ($\exp(-j2\pi ft_0/2)$). On aura donc des R.I. de filtres identiques à l'émission et à la réception, symétriques par rapport à $t_0/2$. Pour le filtre de Nyquist en cosinus surélevé, les filtres $\frac{1}{2}$ Nyquist (en racine de cosinus surélevé) associés ont l'allure suivante :

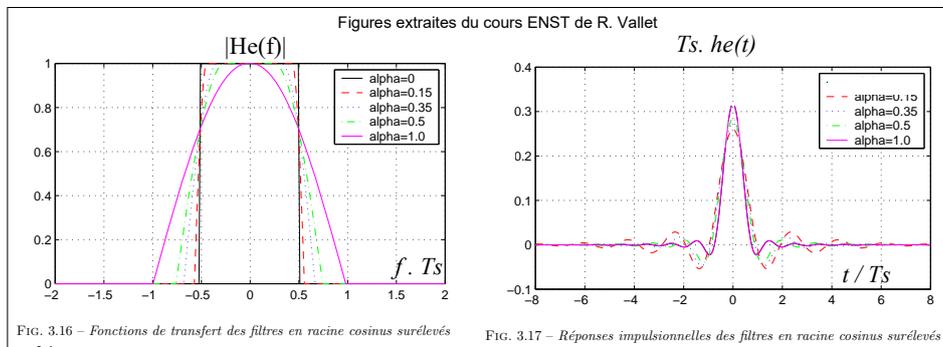


figure : allure du filtre $1/2$ Nyquist en racine de cosinus surélevé (f . de transfert, et R.I., avec $t_0 = 0$)

3) Si le filtre de mise en forme initial $g(\tau)$ est à bande infinie (mise en forme NRZ par exemple), on peut limiter la bande par un deuxième filtre $g_2(\tau)$ tel que l'ensemble, $h_e(\tau) = g(\tau) \otimes g_2(\tau)$, soit un filtre $\frac{1}{2}$ Nyquist à bande limitée B . On aura en fréquence pour $f \in [0, B]$: $G_2(f) = H_e(f) / G(f)$, ce qui permettra de limiter la bande mais sans IES, et avec des performances optimales. Le filtre $G_2(f)$ est appelé filtre $\frac{1}{2}$ Nyquist blanchissant (cas des codes en lignes).

II.3.c) évaluation des performances optimales avec équi-répartition du filtrage de Nyquist (Cas « BPSK ») :

Lorsque le filtre de réception est optimum, on a :
$$\lambda = T_s \int_{-\infty}^{+\infty} |H_e(f)|^2 df = T_s \|h_e\|^2$$

Dans le cas général, le coefficient sans dimension λ pouvait s'interpréter comme un gain en tension (pour les symbole) sur toute la chaîne depuis la source de symboles à la sortie de l'échantillonneur. Avec $H_r(f) = H_e^*(f) \cdot \exp(-j2\pi ft_0)$, il peut aussi s'interpréter (au facteur $\frac{1}{2}$ près dû au passage sur onde porteuse) comme :

- le gain en puissance du filtre de mise en forme à l'émission, appliqué à la puissance des symboles :

La puissance moyenne du signal modulé $x(t)$ à l'entrée du récepteur est en effet donnée par :

$$P_x = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \Gamma_{\tilde{x}}(f) \right|^2 df = \frac{1}{2} \underbrace{A^2}_{\sigma_a^2} T_s \int_{-\infty}^{+\infty} |H_e(f)|^2 df \Rightarrow P_x = \frac{1}{2} \sigma_a^2 \lambda$$

- le gain en puissance d'amplification du bruit à la réception par rapport à un filtre de bande équivalente $1/T_s$:

La puissance moyenne du bruit $b_l(t)$ (ou $b_{l[m]}$) en sortie du filtre de réception est en effet donnée par :

$$\sigma_{bl}^2 = N_0 \int_{-\infty}^{+\infty} |H_e(f)|^2 df \Rightarrow \sigma_{bl}^2 = N_0 \cdot \frac{1}{T_s} \lambda$$

On peut en déduire le RSB maximum (sur la variable de décision) ainsi que la Probabilité d'erreur minimale :

$$RSB_y = \frac{A^2 \lambda^2}{\sigma_{bl}^2} = \frac{A^2 \lambda}{N_0} T_s \Rightarrow Pe = Q(\sqrt{RSB_y}) = Q\left(\sqrt{\frac{A^2 \lambda}{N_0} T_s}\right)$$

On exprime généralement les performances du récepteur en fonction du rapport E_b/N_0 , paramètre d'entrée du récepteur. Pour des symboles binaires ($T_b=T_s$) équiprobables et anti-podaux (+/-A) et le filtre de réception optimal, on a :

une énergie moyenne par bit (BPSK):
$$E_b = P_x T_b = \frac{1}{2} A^2 T_s \lambda$$

On en déduit en fonction du rapport E_b/N_0 , le RSB maximal et la Probabilité d'erreur minimale:

$$RSB_y = \frac{2E_b}{N_0} \quad \text{et} \quad Pe = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

L'allure de la courbe est précisée dans la partie suivante (M=2 pour M-PSK)

II.4 Résultats de performance en Pe par bit pour les différentes modulations

Probabilité d'erreur par bit:

- BPSK et QPSK : $Pe = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$ avec $Q(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$ (complément à 1 de la fonction de Répartition de la loi normale)

- en M-QAM : $Pe = \frac{4(1-1/\sqrt{M})}{\log_2(M)} Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0} \cdot \frac{3 \log_2(M)}{2(M-1)}}\right)$
- en M-PSK : $Pe = \frac{2}{\log_2(M)} Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0} \cdot \log_2(M) \sin^2 \frac{\pi}{M}}\right)$

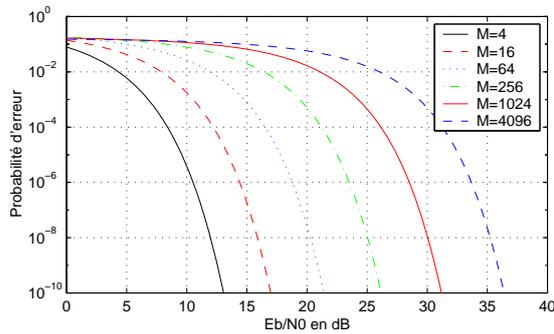


FIG. 5.12 – Probabilité d'erreur d'une modulation QAM

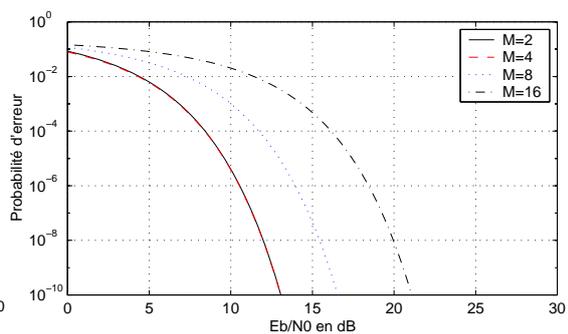


FIG. 5.14 – Probabilité d'erreur d'une modulation PSK

Figures extraites du cours ENST de R. Vallet

figure : courbes de probabilités d'erreur en fonction du rapport E_b/N_0 pour les modulations MAQ-M et MDP-M

II.5 Confrontation des performances de divers modulations vis à vis des limites énoncées par la Théorie de l'Information pour un canal BBAG

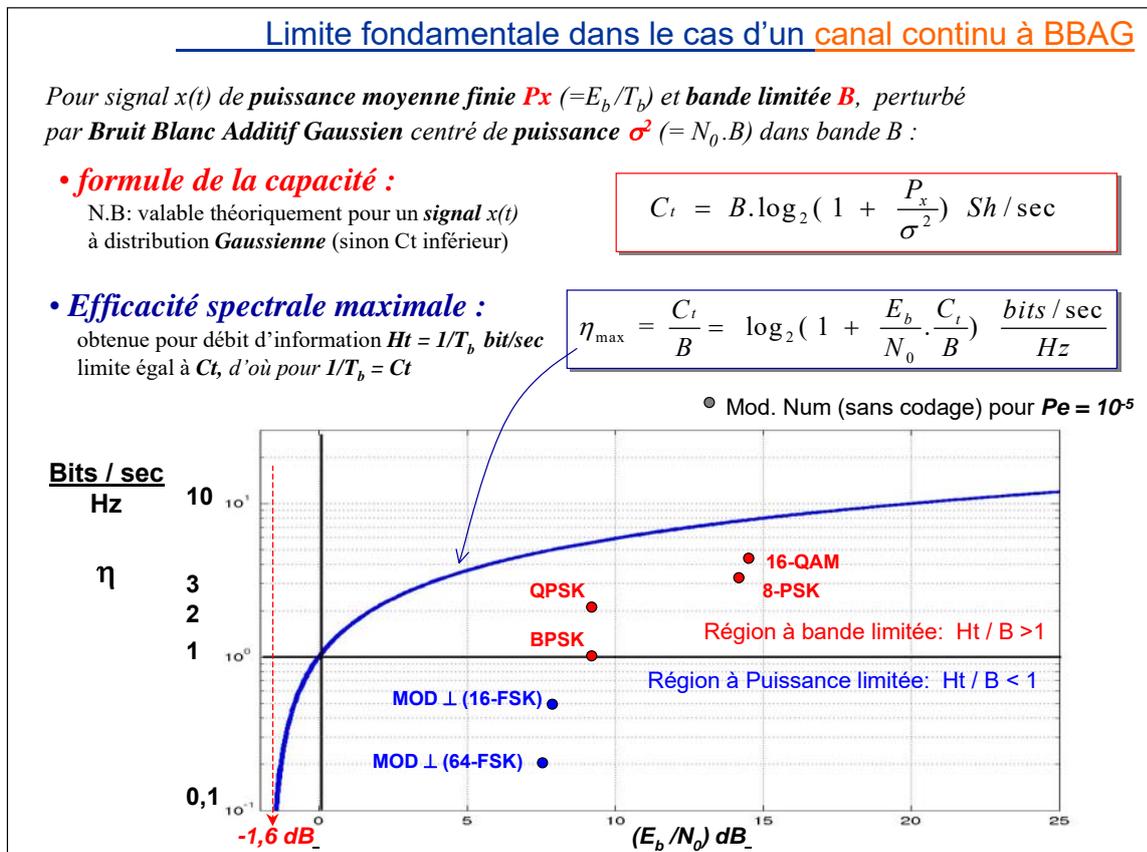
La théorie de l'information (formule HTS) nous indique, pour un puissance utile reçue donnée, le débit d'information maximum en Sh/sec (ou également en bit/sec en supposant les bits délivrés par la source au rythme $D_b = 1/T_b$ indépendants, c'est à dire une source sans redondance), que l'on peut théoriquement acheminer avec une P_e arbitrairement faible.

On peut en déduire, pour un E_b/N_0 donné, la courbe qui donne l'efficacité spectrale (bit/sec)/Hz maximale possible (toujours avec P_e arbitrairement faible).

Par ailleurs, pour les différentes modulations du cours, on peut calculer l'efficacité spectrale (en considérant la bande minimum sans IES, roll-off nul), et comparer le E_b/N_0 requis (pour avoir P_e égale à 10^{-5}) pour cette modulation au E_b/N_0 minimum issu de la théorie de l'information (Cf figure ci-dessous et TD mod n°3).

Par exemple, en BPSK, on utilise un E_b/N_0 de l'ordre de 9.5 dB pour $P_e = 10^{-5}$ avec une efficacité spectrale de 1 (bit/sec)/Hz, alors que la théorie de l'information nous indique que le $(E_b/N_0)_{\min}$ est de 0 dB pour cette efficacité spectrale !

Grâce à l'opération de codage / décodage canal, on pourra se rapprocher de $(E_b/N_0)_{\min}$.



ANNEXES

puis énoncés des TDs

Annexe II.3.A : Expression de la probabilité d'erreur en fonction de la variance de bruit pour une chaîne sans IES et des symboles binaires antipodaux

En supposant que le critère de Nyquist est vérifié pour le filtrage global $p(\tau)$, la variable de décision (réelle) est :

$$y_{I[m]} = a_{I[m]} p_{I[0]} + b_{I[m]}$$

Le bruit $b_{I[m]} = b_I(t_m) = (h_r * n_I)(t)|_{t=t_m}$ est une variable aléatoire gaussienne centrée de densité de probabilité (ddp) :

$$p(b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_b} \exp\left\{-\frac{(b/\sigma_b)^2}{2}\right\}, \text{ et de variance } \sigma_b^2 = E\{b_{I[m]}^2\} = N_0 \int_{-\infty}^{+\infty} |H_r(f)|^2 df$$

Dans le cas de **symboles binaires antipodaux** ($a_{I[m]} \in \{-A, +A\}$) de probabilités respectives $\{p_0, p_1\}$;

La densité de probabilité de $y_{I[m]}$ est donc constituée selon 2 Gaussiennes de même variance et de moyenne respectives $-Ap_{I[0]}$ et $+Ap_{I[0]}$.

La probabilité d'erreur $= \Pr\{\text{symbole décidé} \neq \text{symbole émis}\} = \Pr\{a_{I[m]} = -A; \hat{a}_{I[m]} = +A\} + \Pr\{a_{I[m]} = +A; \hat{a}_{I[m]} = -A\}$, soit :

$$Pe = p_0 \cdot \underbrace{\Pr\{\hat{a}_{I[m]} = +A / a_{I[m]} = -A\}}_{P_{+/-}} + p_1 \cdot \underbrace{\Pr\{\hat{a}_{I[m]} = -A / a_{I[m]} = +A\}}_{P_{-/+}}$$

Avec des symboles binaires, la règle de décision consiste à comparer à un seuil unique s :

$$\begin{aligned} \text{Règle de décision :} \quad & \text{si } y_{I[m]} < s \Rightarrow \hat{a}_{I[m]} = -A \\ & \text{si } y_{I[m]} > s \Rightarrow \hat{a}_{I[m]} = +A \end{aligned}$$

On va chercher à évaluer l'expression de la probabilité d'erreur, de manière à ensuite choisir de manière optimale le seuil s .

La probabilité d'erreur conditionnellement à $a_{I[m]} = -A$ se calcule de la façon suivante :

$$P_{+/-} = \Pr\{y_{I[m]} > s / a_{I[m]} = -A\} = \Pr\{-Ap_{I[0]} + b_{I[m]} > s\} = \Pr\{b_{I[m]} > s + Ap_{I[0]}\}$$

Comme $b_{I[m]} / \sigma_b$ est gaussien centré de variance unité,

on a en intégrant la ddp gaussienne, de $(s + Ap_{I[0]}) / \sigma_b$ à $+\infty$: $P_{+/-} = Q\left(\frac{s + Ap_{I[0]}}{\sigma_{bi}}\right)$

où $Q(\cdot)$ est le complément à 1 de la fonction de répartition de la loi normale : $Q(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$

De la même manière on évalue,

en intégrant la ddp gaussienne, de $-\infty$ à $(s - Ap_{I[0]}) / \sigma_{bi}$: $P_{-/+} = 1 - Q\left(\frac{s - Ap_{I[0]}}{\sigma_{bi}}\right) = Q\left(\frac{-s + Ap_{I[0]}}{\sigma_{bi}}\right)$

D'où :

$$Pe = p_0 \cdot Q\left(\frac{s + Ap_{I[0]}}{\sigma_{bi}}\right) + p_1 \cdot Q\left(\frac{-s + Ap_{I[0]}}{\sigma_{bi}}\right)$$

Le seuil optimal s_{opt} se calcule en cherchant le minimum de Pe par rapport à s :

$$\frac{\partial Pe}{\partial s} = 0 \Rightarrow s_{opt} = \frac{\sigma_{bi}^2}{2Ap_{I[0]}} \ln \frac{p_0}{p_1}$$

Ce que l'on vérifie facilement en faisant un changement de variable dans l'expression de P_e :

$$P_e = p_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_b} \int_s^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{y + Ap_{[0]}}{\sigma_{bl}}\right)^2\right) dy + p_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_{bl}} \int_{-\infty}^s \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{y - Ap_{[0]}}{\sigma_{bl}}\right)^2\right) dy \text{ et en dérivant}$$

$$\frac{\partial P_e}{\partial s} = -p_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_{bl}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{s + Ap_{[0]}}{\sigma_{bl}}\right)^2\right) + p_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_{bl}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{s - Ap_{[0]}}{\sigma_{bl}}\right)^2\right), \text{ d'où le résultat.}$$

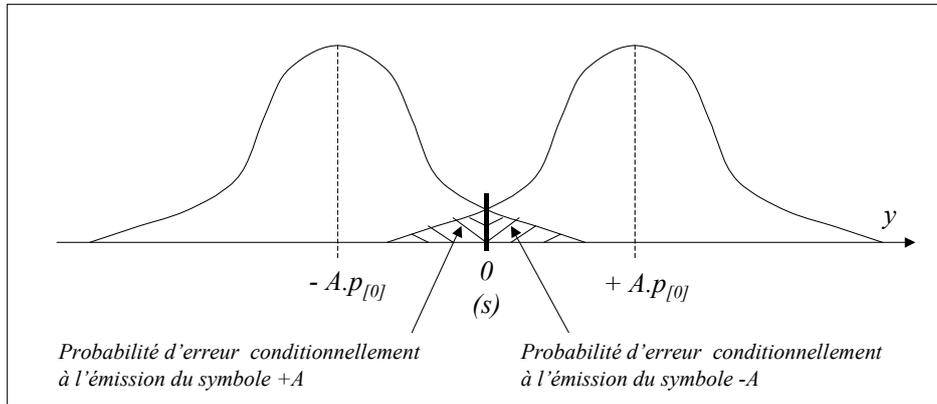


figure : calcul de la probabilité d'erreur (symboles binaires +/- A équiprobables)

Si les symboles sont **équiprobables** ($p_0 = p_1 = 1/2$), le seuil est nul ($s = 0$) et la décision consiste simplement à observer le signe de la variable de décision $y_{[m]}$. La probabilité d'erreur minimale est alors donnée par :

$$P_e = Q\left(\frac{Ap_{[0]}}{\sigma_b}\right)$$

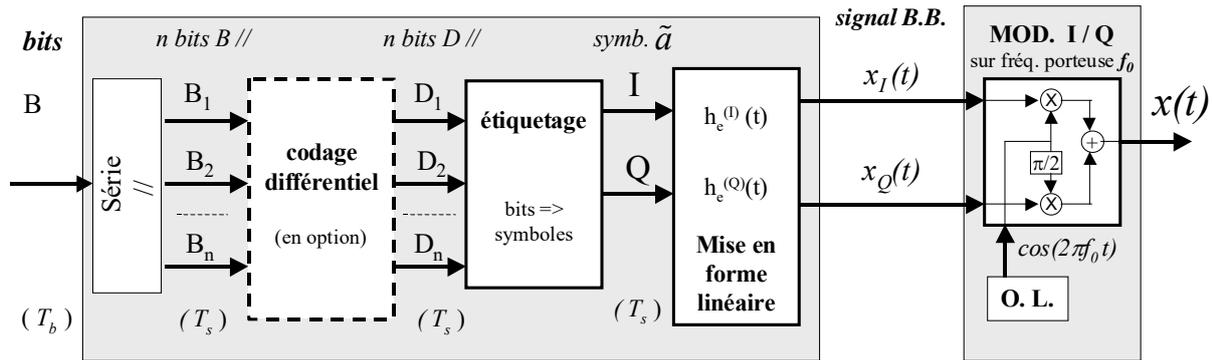
TD n°1 : Modulation numérique sur fréquence porteuse

Étiquetage « bits=> symboles », Modulation I/Q, codage différentiel

On doit transmettre un débit binaire de 1 M bit/sec , sur une fréquence porteuse de 1GHz.

On dispose d'un équipement d'émission (Cf synoptique) dont les différents blocs sont paramétrables.

La mise en forme des symboles complexes $\tilde{a}_{[m]}$ est **linéaire**, à partir d'impulsions sur les voies en phase (I) et en quadrature (Q) paramétrables, mais de durée limitée à la durée symbole T_s .



Ex

exercice 1 : construction d'un signal à Modulation numérique linéaire

On suppose ici qu'il n'y a pas de codage différentiel (bits D = bits de données B). De plus l'impulsion de mise en forme est rectangulaire, identique sur les voies I et Q. On a ainsi, pour la voie I par exemple : $x_I(t) = \text{Re}\{\tilde{a}_{[m]}\}$ pour $t \in [m.T_s ; (m+1).T_s]$, et $m \in \mathbb{Z}$.

Le composant dispose de nombreuses configurations pour l'« étiquetage » bits/ symboles, dont :

D_1 (ou D_2) I (ou Q)	0	1
Config 0	0 V	0 V
Config 1	0 V	3 V
Config 2	-3 V	+3 V
Config 3	+3 V	-3 V

$D_1 \dots D_n$: bits ; $\{I + j.Q\}$: symbole

$D_1 D_2$ (ou $D_3 D_4$) I (ou Q)	00	01	11	10
Config 4	-3 V	-1 V	+1 V	+3 V
Config 5	-2 V	-1 V	+1 V	+2 V

$I Q$	$D_1 D_2 D_3$	000	001	011	010	110	111	101	100
Config 6	I	+4,24V	+3 V	+0 V	-3 V	-4,24V	-3 V	0 V	+3 V
	Q	0 V	+3 V	+4,24V	+3V	0 V	-3 V	-4,24V	-3 V
Config 7	I	+3 V	+1 V	0 V	-1 V	-3 V	-1 V	0 V	+1 V
	Q	0 V	+1 V	+3 V	-1 V	0 V	-1 V	-3 V	-1 V

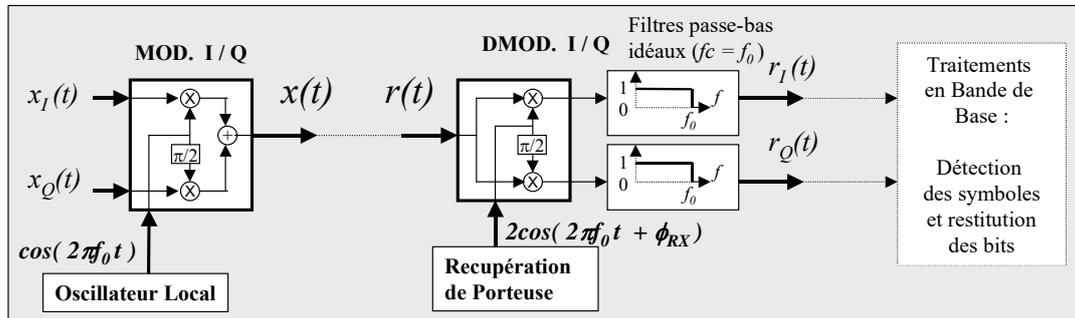
Pour chacune des modulations (dénomination anglaise) BPSK, QPSK, 8-PSK, 16-QAM :

- 1) donner une configuration possible pour obtenir les symboles des voies (I) et(Q),
- 2) représenter les signaux en bande de base $x_I(t)$ et $x_Q(t)$ pour la suite de bits à transmettre : « 0 1 1 0 0 1 1 0 1 0 1 1 », et préciser le débit symbole,
- 3) rappeler le principe et les équations du « Modulateur I/Q » délivrant le signal $x(t)$ modulé sur fréquence porteuse f_0 à partir des composantes en bande de base $x_I(t)$ et $x_Q(t)$.
- 4) Donner la forme de la DSP moyenne des composantes $x_I(t)$ et $x_Q(t)$ et du signal $x(t)$, en supposant que les bits à transmettre sont indépendants, avec des états équiprobables.
- 5) Donner la Puissance (impédance fictive 1Ω) de $x(t)$ en V^2 , ainsi que l'énergie par bit E_b ($V^2 \cdot \text{sec}$)

Exercice 2 : démodulation I/Q

On suppose un scénario simplifié dans lequel le signal reçu est égal au signal émis, $\mathbf{r}(t) = \mathbf{x}(t)$.

Le récepteur réalise une démodulation « I/Q » avec un oscillateur (asservi) de phase « $2\pi f_0 t + \phi_{RX}$ »



- 1) Exprimer en fonction du déphasage Φ_{RX} les composantes analogiques en Bande de Base après démodulation I/Q (en phase et en quadrature) $\{r_I(t), r_Q(t)\}$ en fonction des composantes à l'émission $\{x_I(t), x_Q(t)\}$? Choix idéal pour Φ_{RX} dans le scénario présenté ?
N.B : exprimer (en complexe) $\tilde{r}(t) = r_I(t) + j.r_Q(t)$ en fonction de $\tilde{x}(t) = x_I(t) + j.x_Q(t)$.
- 2) Pour une valeur $\Phi_{RX} \neq 0$, donner qualitativement les conséquences (cas BPSK et QPSK).
- 3) Si la phase de l'oscillateur à l'émission avait été « $2\pi f_0 t + \phi_{TX}$ » au lieu de « $2\pi f_0 t$ », comment devrait on choisir idéalement Φ_{RX} ?

Exercice 3 : Codage différentiel et décodage

On introduit un codage différentiel, afin qu'un groupe \underline{B} de $n = \text{lb}(M)$ bits de données b associé au symbole d'indice temporel m , code les sauts de phase $\Delta\phi_{[m]} = \phi_{[m]} - \phi_{[m-1]}$ et non les états de phase $\phi_{[m]} = \text{Arg}\{(I + jQ)_{[m]}\}$ des symboles (à M états), avec la règle de codage :

- En BPSK ($M=2$): $b_{[m]} = 0 \Rightarrow \Delta\phi_{[m]} = 0$; $b_{[m]} = 1 \Rightarrow \text{saut de } \Delta\phi_{[m]} = \pi$.
- En QPSK ($M=4$): $(b_{1[m]}, b_{2[m]}) = 00; 01; 11; 10$
 $\Rightarrow \Delta\phi_{[m]} = 0; \pi/2; \pi; 3\pi/2$;

Pour les cas BPSK et QPSK (on suppose étiquetage basé sur la config. 2 de l'exo 1):

- 1) indiquer sur un diagramme de constellation, les différentes transitions pour (le début de) la suite de bits b égale à « 0 1 1 0 0 1 1 0 1 0 1 1 », (état de phase initial = 0 en BPSK, $\pi/4$ en QPSK).
- 2) Indiquer par un tableau la règle de codage pour obtenir 1 groupe de n bits codés $\underline{D}_{[m]}$ à partir du groupe de n bits de données actuel $\underline{B}_{[m]}$ et du groupe de n bits codés précédent $\underline{D}_{[m-1]}$.
- 3) Donner le tableau de décodage différentiel.
- 4) On suppose que la phase de la porteuse récupérée est telle que $\Phi_{RX} = \mathbf{K} \cdot 2\pi/M, \forall \mathbf{K} \in \mathbf{Z}$.
Indiquer (pour $\mathbf{K}=0$ et $\mathbf{K}=1$) la suite de bits obtenus à la réception, après le dé-étiquetage (d') et après le décodage différentiel (b'). Conclusion.

Exercice 4 (annexe) : Modulation numérique de fréquence

On s'intéresse à une modulation de fréquence à 2 états ($\text{freq}\{\text{bit } b=0\} > \text{freq}\{\text{bit } b=1\}$)

- 1) Cas des modulations de fréquence sans mémoire (« 2-FSK ») d'indices 1 ; 2/3 puis 1/2 :

Représenter les signaux $x_I(t)$ et $x_Q(t)$ ainsi que l'évolution de phase pour la suite de bits à transmettre « 110101 » (on suppose état de phase initial nul).

- 2) Cas de la modulation de fréquence à phase continue (« MSK ») :

Questions idem au 1).

- 3) **Questions annexes** : pour chacun des cas : la modulation est-elle linéaire ? Peut-elle être mise en œuvre avec le composant d'émission considéré, avec un codage des bits, un étiquetage, et des formes d'impulsions analogiques en voie I et en voie Q appropriées ?

TD n°2 de « Modulation numérique sur fréquence porteuse »:

Energie par bit, filtre de réception, corrélation

Emission : signal à modulation numérique linéaire sur fréquence porteuse $f_0 \gg 1/T_s$:

$$x(t) = \text{Re} \left\{ \underbrace{[T_s \cdot \sum_{m=0}^{+\infty} \tilde{a}_{[m]} \cdot h_e(t - mT_s)]}_{\tilde{x}(t)} \cdot \exp(j2\pi f_0 t) \right\} \quad (1)$$

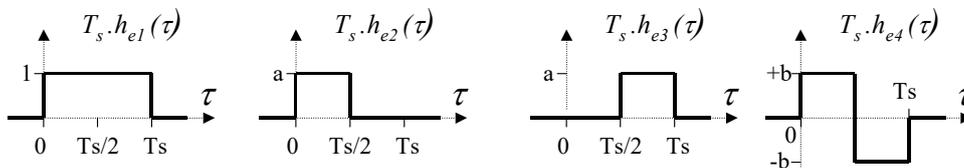
où : $D_s=1/T_s$ est le débit symbole, $h_e(\tau)$ est l'impulsion de mise en forme, $\{\tilde{a}_{[m]}, m \in \mathbb{Z}\}$ sont les symboles complexes à transmettre aux instants $m \cdot T_s$, équiprobables, indépendants, de variance σ_a^2 .

La modulation peut être ici « BPSK », « QPSK », ou « 16-QAM ».

canal : le signal à l'entrée du récepteur est: $r(t) = x(t) + n(t)$, où $n(t)$ est un Bruit Blanc Additif Gaussien (BBAG) centré de dsp (bilatérale) $N_0/2$, (avec $N_0 = 4 \cdot 10^{-21}$ W/Hz, soit -174 dBm/Hz).

Réception : le récepteur réalise une démodulation « I/Q » avec un oscillateur de phase « $2\pi f_0 t$ ». Puis les variables de décision $(y_{I[m]}, y_{Q[m]})$ sont obtenues par filtrage (avec R.I. $h_r(\tau)$ paramétrable) et échantillonnage sur chaque voie aux instants $t_0 + mT_s$, où t_0 est paramétrable. Les décisions sont prises par seuillage sur les voies I et Q, (obtention de $\hat{a}_{I[m]}$ et de $\hat{a}_{Q[m]}$, avec $\hat{a}_{[m]} = \hat{a}_{I[m]} + j \cdot \hat{a}_{Q[m]}$).

Pour ce TD, on considère 4 cas d'impulsions de mise en forme possibles, toutes de durée inférieure ou égale à T_s (on est donc dans le cas d'une transmission à Bande non limitée) :



1°) Energie par bit :

- Avec le 1° filtre de mise en forme, exprimer l'énergie moyenne par bit E_b du signal utile modulé à l'entrée du récepteur en fonction de σ_a^2 et du débit binaire, D_b (en bit/sec).
- Déterminer les valeurs de « a » et « b » pour que E_b soit identique avec les différents filtres h_e .

2°) Pour des choix quelconques de $h_r(\tau)$ et de t_0 , l'échantillon $\tilde{y}_{[m]} = y_{I[m]} + j \cdot y_{Q[m]}$ peut se décomposer en $\tilde{y}_{[m]} = \lambda \cdot \tilde{a}_{[m]} + IES_{[m]} + \tilde{b}_{[m]}$ où $\tilde{b}_{[m]}$ est lié au bruit additif $n(t)$.

- Préciser l'expression du coefficient λ , en fonction de $p(\tau) = (h_e * h_r)(\tau)$ et de t_0 ?

On appelle $RSBy_1 = E\{ |\lambda \cdot a_{I[m]}|^2 \} / E\{ |b_{I[m]}|^2 \}$ = le Rapport Signal à Bruit de la variable de décision, $y_{I[m]}$, évalué sur la voie I. Sans IES, le $RSBy_1$ est un indicateur (pour 1 mod. donnée) sur la qualité des décisions.

3°) filtre de réception adapté : afin de maximiser le $RSBy_1$, on choisit $h_r(\tau) = h_e(-\tau + t_0)$, filtre adapté à $h_e(\tau)$, décalé de t_0 (délai d'échantillonnage) pour que le filtre h_r soit causal. Préciser pour chacun (ou quelques-uns) des 4 cas d'impulsion h_e :

- le délai minimum t_{0min} (adopté pour la suite du TD) pour que le filtre $h_r(\tau)$ soit causal?
- l'allure de $h_r(\tau)$, la valeur de λ , les allures de $p(\tau) = (h_e * h_r)(\tau)$, du signal $y_I(t)$ pour les symboles $\{+A ; -A ; +A ; +A ; -A, \dots\}$ aux « instants » $m = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$

- Annexe : préciser si les filtres $h_e(\tau)$ et $p(\tau)$ sont des filtres à phase linéaire ?

4°) La variable de décision est-elle affectée d' **Interférence Entre Symbole** (IES)?

5°) Expression de $RSBy_1$ en fonction du rapport E_b/N_0 en BPSK (annexe : en QPSK, 16 QAM) ?

6°) Sachant qu'en BPSK, la **probabilité d'erreur par bit** (sans IES) est : $Pe = Q\left\{\sqrt{RSBy_1}\right\}$, où $Q(\cdot)$ est le

complément à 1 de la fonction de répartition de la loi normale : $Q(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$,

- Evaluer la **puissance minimale** P_x à émettre en BPSK pour acheminer un débit binaire de $D_b = 34$ Mbit/s garantissant $Pe \leq 10^{-4}$. P_x dépend-elle de la forme d'onde choisie h_e ?

Annexe : fonction $Q(\cdot)$: $Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$ $Q(x) \approx \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ pour $x > 4$

X	Q(x)	X	Q(x)	X	Q(x)	X	Q(x)
0,00	0,5000	1,00	0,1587	2,00	0,0228	3,00	0,00135
0,05	0,4801	1,05	0,1469	2,05	0,0202	3,05	0,00114
0,10	0,4602	1,10	0,1357	2,10	0,0179	3,10	0,00097
0,15	0,4404	1,15	0,1251	2,15	0,0158	3,15	0,00082
0,20	0,4207	1,20	0,1151	2,20	0,0139	3,20	0,00069
0,25	0,4013	1,25	0,1056	2,25	0,0122	3,25	0,00058
0,30	0,3821	1,30	0,0968	2,30	0,0107	3,30	0,00048
0,35	0,3632	1,35	0,0885	2,35	0,0094	3,35	0,00040
0,40	0,3446	1,40	0,0808	2,40	0,0082	3,40	0,00034
0,45	0,3264	1,45	0,0735	2,45	0,0071	3,45	0,00028
0,50	0,3085	1,50	0,0668	2,50	0,0062	3,50	0,00023
0,55	0,2912	1,55	0,0606	2,55	0,0054	3,55	0,00019
0,60	0,2743	1,60	0,0548	2,60	0,0047	3,60	0,00016
0,65	0,2578	1,65	0,0495	2,65	0,0040	3,65	0,00013
0,70	0,2420	1,70	0,0446	2,70	0,0035	3,70	0,00011
0,75	0,2266	1,75	0,0401	2,75	0,0030	3,75	0,00009
0,80	0,2169	1,80	0,0359	2,80	0,0026	3,80	0,00007
0,85	0,1977	1,85	0,0322	2,85	0,0022	3,85	0,00006
0,90	0,1841	1,90	0,0287	2,90	0,0019	3,90	0,00005
0,95	0,1711	1,95	0,0256	2,95	0,0016	3,95	0,00004
4,00	0,00003						
4,25	10-5						
4,75	10-6						
5,20	10-7						
5,60	10-8						

Questions annexes

7°) **Annexe : réalisation sous forme de corrélation** : une opération de corrélation permet d'obtenir de manière équivalente aux opérations de filtre adapté et échantillonnage, l'échantillon $\tilde{y}_{[m]}$ à partir du signal en bande de base issu de la démodulation I/Q , $\tilde{r}_{[m]} = r_{I[m]} + j \cdot r_{Q[m]}$.

- Donner l'expression de $\tilde{y}_{[m]}$ faisant apparaître une corrélation, et finalement un produit scalaire entre une partie (à préciser) du signal $\tilde{r}(t)$ et la fonction h_e .

NB : $\gamma_{\tilde{r}, h_e}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{r}(t) \cdot h_e(t - \tau) dt$: f. de corrélation (déterministe) entre r et h_e (réel, énergie finie) au retard τ .

8°) **Annexe : transmission multi-voie ou (multi-utilisateur)** : on envoie simultanément un 2° signal (additif) construit selon (1), mais avec des symboles et une mise en forme différents pour cette 2° « voie ». Le récepteur d'une voie (« désirée ») ne tient pas compte de la 2° voie (« interférente »).

- On suppose l'utilisation des formes d'ondes 1 (désirée) et 2 (interférente). Exprimer, $\tilde{y}_{[m]}$ en fonction des symboles de la voie désirée et de ceux de la voie interférente. Commentaires ?
- Indiquer les couples de formes d'ondes pour lesquels la cohabitation des 2 voies n'amène aucune dégradation des performances (sur le RSBY et le TEB). Commentaires (débit, Bande passante)?

TD n°3 : Modulation numérique sur fréquence porteuse

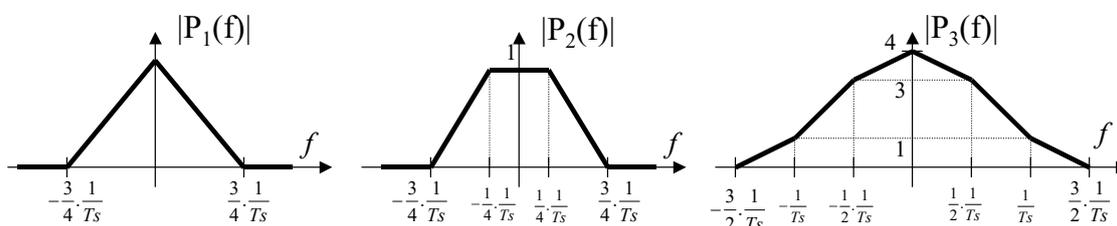
Transmission à Bande limitée, Critère de Nyquist, limite fondamentale

Contexte général Modulation Num. linéaire sur fréquence porteuse, avec récepteur linéaire : idem TD2

Exercice 1 : Critère de Nyquist en fréquence

On considère la liaison numérique (modulation linéaire sur f . porteuse) ayant une rapidité de modulation $R = 1 / T_s$ symb/sec, avec un filtre de mise en forme à l'émission de fonction de transfert $He(f)$, et un filtre de réception (avant échantillonnage aux instants $t_m = t_0 + mT_s$) de fonction de transfert $Hr(f)$. On suppose que le filtre global Emission/Réception $P(f) = He(f) Hr(f)$, est un filtre à déphasage linéaire $P(f) = |P(f)| \cdot \exp\{-j2\pi f t_0\}$.

- Pour chacun des 3 cas de module $|P(f)|$, préciser s'ils permettent une transmission sans IES à la rapidité R , et donner l'excès de bande (roll-off) ?



Exercice 2 : Répartition optimale du filtrage Emission / Réception

On désire acheminer un débit binaire de 34 Mbit/s en modulation BPSK, avec un rapport (E_b/N_0) de 8,5 dB à l'entrée du récepteur, et sans IES, mais on suppose que la bande dont on dispose est limitée (contrairement au cas des TD précédents) à $B = 51$ MHz autour de f_0 .

On s'intéresse à plusieurs scénarios pour les fonctions de transfert des filtres d'émission $He(f)$ et de réception $Hr(f)$, qui sont tous à phase linéaire (on suppose un retard d'échantillonnage $t_0 \gg T_s$) pour que les filtres soient réalisables avec une bonne approximation) :

Scénario 1 : $ He(f) = K_1 \cdot \text{Nyq}(f) $;	$ Hr(f) = \text{Rect}_{[-25,5\text{MHz}; 25,5\text{MHz}]}(f)$;
Scénario 2 : $ He(f) = K_2 \cdot \text{Rect}_{[-25,5\text{MHz}; 25,5\text{MHz}]}(f) $;	$ Hr(f) = \text{Nyq}(f) $;
Scénario 3 : $ He(f) = \sqrt{ \text{Nyq}(f) }$;	$ Hr(f) = \sqrt{ \text{Nyq}(f) }$

Où $|\text{Nyq}(f)|$ est un filtre de Nyquist d'excès de bande (« roll-off ») 50% de forme $|P_2(f)|$, et donc de support fréquentiel $[-25,5 \text{ MHz}; +25,5 \text{ MHz}]$ (sans perte de généralité, on a la normalisation $\int_{-\infty}^{+\infty} |\text{Nyq}(f)| df = 1/T_s = 34 \text{ MHz}$). K_1, K_2 , sont des constantes de normalisation.

NB : en pratique on aurait plutôt $|\text{Nyq}(f)|$ avec une forme en Cosinus surélevé, mais on simplifie ici les calculs.

1) vérifier que la transmission sans IES est possible pour les différents scénarios (on raisonnera en fréquence en supposant des déphasages de filtres réglés de manière adéquate, même si en pratique il y aura nécessairement une approximation dû à la troncature des R.I. des filtres).

2) Pour les 3 scénarios, comparer les valeurs du $\text{RSBy}_1 = P_{\text{utile}} / \sigma_b^2$ sur la variable de décision, pour un même rapport E_b/N_0 d'entrée (c'est à dire une même puissance émise), ainsi que les probabilités d'erreur binaires $P_e = Q\left\{\sqrt{\text{RSBy}_1}\right\}$ obtenues (A.N. pour un E_b/N_0 de 8.5 dB, Cf table de $Q(\cdot)$ en TD2).

N.B : on peut normaliser K_1 et K_2 pour une même puissance émise que dans le scénario 3, mais non obligatoire.
 NB : modèle après échantillonnage sans IES (pour partie réelle):

$$y_{I[m]} = \lambda \cdot a_{I[m]} + b_{I[m]} ,$$

avec $P_{utile} = E \{ |\lambda \cdot a_{I[m]}|^2 \}$, et variance du bruit $\sigma_{bI}^2 = E \{ |b_{I[m]}|^2 \}$

- Conclure sur le bon scénario de filtrage ? La limitation de bande pénalise-t-elle la performance par rapport à la situation à bande infinie (TDs précédents) ?

Exercice 3 : efficacité spectrale des modulations, comparaison aux limites de Shannon

- 1) Déterminer l'efficacité spectrale (η) en (bit/sec)/Hz des modulations M-PSK (M=2, 4, ..) et M-QAM (M=16, ...) en supposant l'utilisation de la bande B minimale pour transmettre sans IES,
- 2) A partir des courbes de performances ci-dessous (données pour des filtres émission/ réception optimaux et un canal BBAG), déterminer le rapport E_b/N_0 requis (ordre de grandeur) pour avoir une probabilité d'erreur binaire P_e inférieure à 10^{-5} en BPSK, QPSK, 8-PSK, 16QAM, ...?

Annexe (A..N.) : Peut-on (préciser les paramètres alors) avec une modulation linéaire M-PSK ou M-QAM transmettre ($N_0 = 4.10^{-21}$ W/Hz) un Débit binaire de 100 Mbit/s avec $P_e < 10^{-5}$:

- a) avec $B \leq 50$ MHz et puissance utile reçue $P \leq 4.10^{-12}$ W (-84 dBm).
- b) avec $B \leq 10$ MHz et P non limitée (à préciser).
- c) avec B non limitée (à préciser) et $P \leq 1.10^{-12}$ W (-90 dBm).

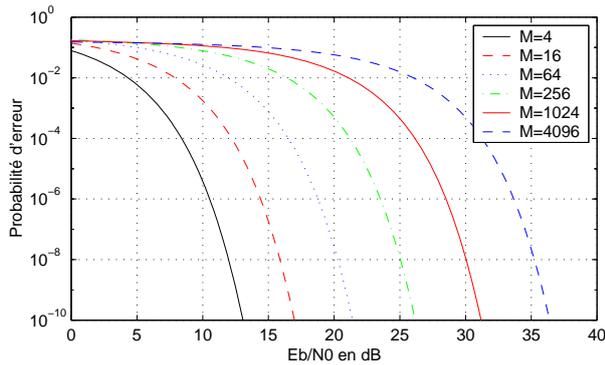


FIG. 5.12 – Probabilité d'erreur d'une modulation QAM

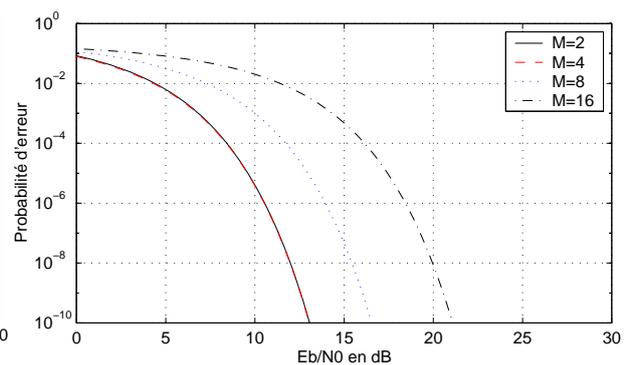


FIG. 5.14 – Probabilité d'erreur d'une modulation PSK

Figures extraites du cours ENST de R. Vallet

3) Théorie de l'Information (avec BBAG)

- Déterminer les valeurs de (E_b/N_0) théoriques minimales d'après la théorie de l'information pour transmettre (avec P_e arbitrairement faible) avec les mêmes efficacités spectrales qu'en 1) ?

Questions subsidiaires :

- Théoriquement, si on n'a pas de limite sur la puissance émise, existe-t-il des procédés de transmission (fiable à volonté) d'efficacité spectrale aussi grande que voulue ?
- Théoriquement, si on n'a pas de limite de bande-passante, existe-t-il des procédés de transmission (fiable à volonté) travaillant à rapport E_b/N_0 aussi faible que voulu ? Donner la limite sinon.

Annexe (information pratique): la technique de modulation (non linéaire) utilisant un dictionnaire de M signaux orthogonaux (débit d'info $\log_2(M) / T_s$ Sh/sec, exemple mod. de fréquence d'indice 1/2), présente une P. d'erreur par symbole (avec récepteur optimal) de : $P_M < 2 \exp \{ -\log_2(M) \cdot (\sqrt{E_b / N_0} - \sqrt{\ln 2})^2 \}$