Théorie des Langages 1

Cours 7 : Propriétés de fermeture

L. Rieg

Grenoble INP - Ensimag, 1re année

Année 2022-2023

Stabilité des langages réguliers

Théorème

La classe des langages réguliers est fermée par :

- *union, concaténation et concaténation itérée (cf. cours 3)*

Stabilité des langages réguliers

Théorème

La classe des langages réguliers est fermée par :

- *union, concaténation et concaténation itérée (cf. cours 3)*
- *substitution régulière et homomorphisme*

Substitution régulière

Définition

Soit V et W deux vocabulaires.

Une substitution régulière est une fonction $s : V \to \mathcal{P}(W^*)$ qui à tout $a \in V$ associe un langage régulier $s(a) \subseteq W^*$.

Substitution régulière

Définition

Soit V et W deux vocabulaires.
Une substitution régulière est une fonction $s : V \to \mathcal{P}(W^*)$
qui à tout $a \in V$ associe un langage régulier $s(a) \subseteq W^*$.

On étend s aux mots par induction : $s^* : V^* \to \mathcal{P}(W^*)$

Substitution régulière

Définition

Soit V et W deux vocabulaires.
Une substitution régulière est une fonction $s : V \to \mathcal{P}(W^*)$ qui à tout $a \in V$ associe un langage régulier $s(a) \subseteq W^*$.

On étend s aux mots par induction : $s^* : V^* \to \mathcal{P}(W^*)$

- $s^*(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$

Substitution régulière

Définition

Soit V et W deux vocabulaires.
Une substitution régulière est une fonction $s : V \to \mathcal{P}(W^*)$
qui à tout $a \in V$ associe un langage régulier $s(a) \subseteq W^*$.

On étend s aux mots par induction : $s^* : V^* \to \mathcal{P}(W^*)$

- $s^*(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$
- $s^*(aw) = s(a).s^*(w)$

Substitution régulière

Définition

Soit V et W deux vocabulaires.
Une substitution régulière est une fonction $s : V \to \mathcal{P}(W^*)$
qui à tout $a \in V$ associe un langage régulier $s(a) \subseteq W^*$.

On étend s aux mots par induction : $s^* : V^* \to \mathcal{P}(W^*)$

- $s^*(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$
- $s^*(aw) = s(a).s^*(w)$

On étend s^* aux langages : $\overline{s} : \mathcal{P}(V^*) \to \mathcal{P}(W^*)$.

Substitution régulière

Définition

Soit V et W deux vocabulaires.
Une substitution régulière est une fonction $s : V \to \mathcal{P}(W^*)$ qui à tout $a \in V$ associe un langage régulier $s(a) \subseteq W^*$.

On étend s aux mots par induction : $s^* : V^* \to \mathcal{P}(W^*)$

- $s^*(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$
- $s^*(aw) = s(a).s^*(w)$

On étend s^* aux langages : $\overline{s} : \mathcal{P}(V^*) \to \mathcal{P}(W^*)$.

$$\forall L \subseteq V^*,\ \overline{s}(L) = \bigcup_{w \in L} s^*(w)$$

Substitution régulière

Définition

Soit V et W deux vocabulaires.

Une substitution régulière est une fonction $s : V \to \mathcal{P}(W^*)$ qui à tout $a \in V$ associe un langage régulier $s(a) \subseteq W^*$.

On étend s aux mots par induction : $s^* : V^* \to \mathcal{P}(W^*)$

- $s^*(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$
- $s^*(aw) = s(a).s^*(w)$

On étend s^* aux langages : $\overline{s} : \mathcal{P}(V^*) \to \mathcal{P}(W^*)$.

$$\forall L \subseteq V^*,\ \overline{s}(L) = \bigcup_{w \in L} s^*(w)$$

On pourra noter s au lieu de s^* ou $\overline{s}$.

Propriété de fermeture

Exemple

Soient $V = \{a, b\}$ et $W = \{c, d\}$. On pose :

$$\begin{aligned} L &= \left\{ab^i \mid i \geq 0\right\} \\ s(a) &= \left\{c^i \mid i \geq 0\right\} \\ s(b) &= \{cd\} \end{aligned}$$

Alors $s(L) =$

Propriété de fermeture

Exemple

Soient $V = \{a, b\}$ et $W = \{c, d\}$. On pose :

$$\begin{array}{rcl} L & = & \left\{ab^i \mid i \geq 0\right\} \\ s(a) & = & \left\{c^i \mid i \geq 0\right\} \\ s(b) & = & \{cd\} \end{array}$$

Alors $s(L) = \left\{c^i(cd)^j \mid i, j \geq 0\right\}$

Propriété de fermeture

Exemple

Soient $V = \{a, b\}$ et $W = \{c, d\}$. On pose :

$$\begin{aligned} L &= \left\{ab^i \mid i \geq 0\right\} = ab^* \\ s(a) &= \left\{c^i \mid i \geq 0\right\} \\ s(b) &= \{cd\} \end{aligned}$$

Alors $s(L) = \left\{c^i(cd)^j \mid i, j \geq 0\right\}$

Propriété de fermeture

Exemple

Soient $V = \{a, b\}$ et $W = \{c, d\}$. On pose :

$$\begin{array}{rcl} L & = & \left\{ab^i \mid i \geq 0\right\} = ab^* \\ s(a) & = & \left\{c^i \mid i \geq 0\right\} = c^* \\ s(b) & = & \{cd\} \end{array}$$

Alors $s(L) = \left\{c^i(cd)^j \mid i, j \geq 0\right\}$

Propriété de fermeture

Exemple

Soient $V = \{a, b\}$ et $W = \{c, d\}$. On pose :

$$\begin{array}{rcl} L & = & \left\{ab^i \mid i \geq 0\right\} = ab^* \\ s(a) & = & \left\{c^i \mid i \geq 0\right\} = c^* \\ s(b) & = & \{cd\} = cd \end{array}$$

Alors $s(L) = \left\{c^i(cd)^j \mid i, j \geq 0\right\}$

Propriété de fermeture

Exemple

Soient $V = \{a, b\}$ et $W = \{c, d\}$. On pose :

$$\begin{array}{rcl} L &=& \left\{ab^i \mid i \geq 0\right\} = ab^* \\ s(a) &=& \left\{c^i \mid i \geq 0\right\} = c^* \\ s(b) &=& \{cd\} = cd \end{array}$$

Alors $s(L) = \left\{c^i(cd)^j \mid i, j \geq 0\right\} = c^*(cd)^*$

Propriété de fermeture

Exemple

Soient $V = \{a, b\}$ et $W = \{c, d\}$. On pose :

$$\begin{array}{rcl} L & = & \left\{ab^i \mid i \geq 0\right\} = ab^* \\ s(a) & = & \left\{c^i \mid i \geq 0\right\} = c^* \\ s(b) & = & \{cd\} = cd \end{array}$$

Alors $s(L) = \left\{c^i(cd)^j \mid i, j \geq 0\right\} = c^*(cd)^*$

Théorème

La classe des langages réguliers est fermée par substitution régulière.

Autrement dit, si L est un langage régulier et s est une substitution régulière, alors $s(L)$ est un langage régulier.

Preuve du théorème

Étapes :

1. On étend les substitutions régulières aux expressions régulières :
$$\forall \text{ ER } E \text{ sur } V,\ s(E) \stackrel{\text{def}}{=} s(\mathcal{L}(E)).$$
2. On prouve que si E est une expression régulière sur V, alors il existe une expression régulière E' sur W telle que $s(E) = \mathcal{L}(E')$.

Lemme intermédiaire sur les mots

Proposition

Soit s *une substitution régulière. Pour tous* $u, v \in V^*$, *on a*

$$s^*(u.v) = s^*(u).s^*(v) \ .$$

Lemme intermédiaire sur les mots

Proposition

Soit s une substitution régulière. Pour tous $u, v \in V^*$, on a

$$s^*(u.v) = s^*(u).s^*(v) \ .$$

Preuve : Soit $v \in V^*$. On prouve que pour tout $u \in V^*$ on a $s^*(u.v) = s^*(u).s^*(v)$ par induction structurelle sur u.

Lemme intermédiaire sur les mots

Proposition

Soit s une substitution régulière. Pour tous $u, v \in V^*$, on a

$$s^*(u.v) = s^*(u).s^*(v) \ .$$

Preuve : Soit $v \in V^*$. On prouve que pour tout $u \in V^*$ on a $s^*(u.v) = s^*(u).s^*(v)$ par induction structurelle sur u.

Base $\quad s^*(\varepsilon.v)$

Lemme intermédiaire sur les mots

Proposition

Soit s une substitution régulière. Pour tous $u, v \in V^*$, on a

$$s^*(u.v) = s^*(u).s^*(v) \ .$$

Preuve : Soit $v \in V^*$. On prouve que pour tout $u \in V^*$ on a $s^*(u.v) = s^*(u).s^*(v)$ par induction structurelle sur u.

Base $\quad s^*(\varepsilon.v) \quad = \qquad s^*(v)$

Lemme intermédiaire sur les mots

Proposition

Soit s une substitution régulière. Pour tous $u, v \in V^*$, on a

$$s^*(u.v) = s^*(u).s^*(v) \ .$$

Preuve : Soit $v \in V^*$. On prouve que pour tout $u \in V^*$ on a $s^*(u.v) = s^*(u).s^*(v)$ par induction structurelle sur u.

Base
$$\begin{array}{rcl} s^*(\varepsilon.v) & = & s^*(v) \\ & = & \{\varepsilon\}.s^*(v) \end{array}$$

Lemme intermédiaire sur les mots

Proposition

Soit s une substitution régulière. Pour tous $u, v \in V^*$, on a

$$s^*(u.v) = s^*(u).s^*(v) \ .$$

Preuve : Soit $v \in V^*$. On prouve que pour tout $u \in V^*$ on a $s^*(u.v) = s^*(u).s^*(v)$ par induction structurelle sur u.

Base

$$\begin{array}{rcr} s^*(\varepsilon.v) & = & s^*(v) \\ & = & \{\varepsilon\}.s^*(v) \\ & = & s^*(\varepsilon).s^*(v) \end{array}$$

Lemme intermédiaire sur les mots

Proposition

Soit s une substitution régulière. Pour tous $u, v \in V^*$, on a

$$s^*(u.v) = s^*(u).s^*(v) \ .$$

Preuve : Soit $v \in V^*$. On prouve que pour tout $u \in V^*$ on a $s^*(u.v) = s^*(u).s^*(v)$ par induction structurelle sur u.

Base
$$\begin{aligned} s^*(\varepsilon.v) &= s^*(v) \\ &= \{\varepsilon\}.s^*(v) \\ &= s^*(\varepsilon).s^*(v) \end{aligned}$$

Induction

$$s^*(au'.v)$$

Lemme intermédiaire sur les mots

Proposition

Soit s une substitution régulière. Pour tous $u, v \in V^*$, on a

$$s^*(u.v) = s^*(u).s^*(v)\ .$$

Preuve : Soit $v \in V^*$. On prouve que pour tout $u \in V^*$ on a $s^*(u.v) = s^*(u).s^*(v)$ par induction structurelle sur u.

Base

$$\begin{array}{rcl} s^*(\varepsilon.v) & = & s^*(v) \\ & = & \{\varepsilon\}.s^*(v) \\ & = & s^*(\varepsilon).s^*(v) \end{array}$$

Induction

$$s^*(au'.v) \;=\; s^*(a(u'.v))$$

Lemme intermédiaire sur les mots

Proposition

Soit s *une substitution régulière. Pour tous* $u, v \in V^*$*, on a*

$$s^*(u.v) = s^*(u).s^*(v) \; .$$

Preuve : Soit $v \in V^*$. On prouve que pour tout $u \in V^*$ on a $s^*(u.v) = s^*(u).s^*(v)$ par induction structurelle sur u.

Base

$$\begin{array}{rcr} s^*(\varepsilon.v) & = & s^*(v) \\ & = & \{\varepsilon\}.s^*(v) \\ & = & s^*(\varepsilon).s^*(v) \end{array}$$

Induction

$$\begin{array}{rcll} s^*(au'.v) & = & s^*(a(u'.v)) & \\ & = & s(a).s^*(u'.v) & \text{(déf. de } s^*\text{)} \end{array}$$

Lemme intermédiaire sur les mots

Proposition

Soit s une substitution régulière. Pour tous $u, v \in V^*$, on a

$$s^*(u.v) = s^*(u).s^*(v) \ .$$

Preuve : Soit $v \in V^*$. On prouve que pour tout $u \in V^*$ on a $s^*(u.v) = s^*(u).s^*(v)$ par induction structurelle sur u.

Base

$$\begin{aligned} s^*(\varepsilon.v) &= s^*(v) \\ &= \{\varepsilon\}.s^*(v) \\ &= s^*(\varepsilon).s^*(v) \end{aligned}$$

Induction

$$\begin{aligned} s^*(au'.v) &= s^*(a(u'.v)) \\ &= s(a).s^*(u'.v) && \text{(déf. de } s^*\text{)} \\ &= s(a).(s^*(u').s^*(v)) && \text{(Hyp. Ind.)} \end{aligned}$$

Lemme intermédiaire sur les mots

Proposition

Soit s une substitution régulière. Pour tous $u, v \in V^*$, on a

$$s^*(u.v) = s^*(u).s^*(v) \ .$$

Preuve : Soit $v \in V^*$. On prouve que pour tout $u \in V^*$ on a $s^*(u.v) = s^*(u).s^*(v)$ par induction structurelle sur u.

Base

$$\begin{aligned} s^*(\varepsilon.v) &= s^*(v) \\ &= \{\varepsilon\}.s^*(v) \\ &= s^*(\varepsilon).s^*(v) \end{aligned}$$

Induction

$$\begin{aligned} s^*(au'.v) &= s^*(a(u'.v)) && \\ &= s(a).s^*(u'.v) && \text{(déf. de } s^*\text{)} \\ &= s(a).(s^*(u').s^*(v)) && \text{(Hyp. Ind.)} \\ &= (s(a).s^*(u')).s^*(v) && \text{(assoc. de .)} \end{aligned}$$

Lemme intermédiaire sur les mots

Proposition

Soit s une substitution régulière. Pour tous $u, v \in V^*$, on a

$$s^*(u.v) = s^*(u).s^*(v) \ .$$

Preuve : Soit $v \in V^*$. On prouve que pour tout $u \in V^*$ on a $s^*(u.v) = s^*(u).s^*(v)$ par induction structurelle sur u.

Base
$$\begin{array}{rcr} s^*(\varepsilon.v) & = & s^*(v) \\ & = & \{\varepsilon\}.s^*(v) \\ & = & s^*(\varepsilon).s^*(v) \end{array}$$

Induction
$$\begin{array}{rcll} s^*(au'.v) & = & s^*(a(u'.v)) & \\ & = & s(a).s^*(u'.v) & \text{(déf. de } s^*\text{)} \\ & = & s(a).(s^*(u').s^*(v)) & \text{(Hyp. Ind.)} \\ & = & (s(a).s^*(u')).s^*(v) & \text{(assoc. de .)} \\ & = & s^*(au').s^*(v) & \text{(déf. de } s^*\text{)} \end{array}$$

Lemme intermédiaire sur les ER

Lemme

Soit s une substitution régulière, et soient E et E' des expressions régulières sur V. Alors

$$\begin{array}{rcl} s(E.E') & = & s(E).s(E') \\ s(E+E') & = & s(E) \cup s(E') \\ s(E^*) & = & s(E)^* \end{array}$$

Preuve.

Lemme intermédiaire sur les ER

Lemme

Soit s une substitution régulière, et soient E et E' des expressions régulières sur V. Alors

$$\begin{array}{lcl} s(E.E') & = & s(E).s(E') \\ s(E+E') & = & s(E) \cup s(E') \\ s(E^*) & = & s(E)^* \end{array}$$

Preuve.

- Prouvons que $s(E.E') \subseteq s(E).s(E')$.

  Soit $w \in s(E.E')$. Il existe $v \in E.E'$ tel que $w \in s(v)$.

Lemme intermédiaire sur les ER

Lemme

Soit s une substitution régulière, et soient E et E' des expressions régulières sur V. Alors

$$\begin{array}{lcl} s(E.E') & = & s(E).s(E') \\ s(E+E') & = & s(E) \cup s(E') \\ s(E^*) & = & s(E)^* \end{array}$$

Preuve.

- Prouvons que $s(E.E') \subseteq s(E).s(E')$.

  Soit $w \in s(E.E')$. Il existe $v \in E.E'$ tel que $w \in s(v)$.
  Comme $v \in E.E'$, il existe $u \in E$ et $u' \in E'$ tels que $v = u.u'$.

Lemme intermédiaire sur les ER

Lemme

Soit s une substitution régulière, et soient E et E' des expressions régulières sur V. Alors

$$\begin{array}{rcl} s(E.E') & = & s(E).s(E') \\ s(E+E') & = & s(E) \cup s(E') \\ s(E^*) & = & s(E)^* \end{array}$$

Preuve.

- Prouvons que $s(E.E') \subseteq s(E).s(E')$.

  Soit $w \in s(E.E')$. Il existe $v \in E.E'$ tel que $w \in s(v)$.
  Comme $v \in E.E'$, il existe $u \in E$ et $u' \in E'$ tels que $v = u.u'$.
  Donc $w \in s(u.u') = s(u).s(u')$.

Lemme intermédiaire sur les ER

Lemme

Soit s une substitution régulière, et soient E et E' des expressions régulières sur V. Alors

$$\begin{array}{rcl} s(E.E') & = & s(E).s(E') \\ s(E+E') & = & s(E) \cup s(E') \\ s(E^*) & = & s(E)^* \end{array}$$

Preuve.

- Prouvons que $s(E.E') \subseteq s(E).s(E')$.

  Soit $w \in s(E.E')$. Il existe $v \in E.E'$ tel que $w \in s(v)$.
  Comme $v \in E.E'$, il existe $u \in E$ et $u' \in E'$ tels que $v = u.u'$.
  Donc $w \in s(u.u') = s(u).s(u')$.
  Comme $s(u) \subseteq s(E)$ et $s(u') \subseteq s(E')$, on a le résultat.

Lemme intermédiaire sur les ER

Lemme

Soit s une substitution régulière, et soient E et E' des expressions régulières sur V. Alors

$$\begin{array}{lcl} s(E.E') & = & s(E).s(E') \\ s(E+E') & = & s(E) \cup s(E') \\ s(E^*) & = & s(E)^* \end{array}$$

Preuve.

- Prouvons que $s(E.E') \subseteq s(E).s(E')$.

  Soit $w \in s(E.E')$. Il existe $v \in E.E'$ tel que $w \in s(v)$.
  Comme $v \in E.E'$, il existe $u \in E$ et $u' \in E'$ tels que $v = u.u'$.
  Donc $w \in s(u.u') = s(u).s(u')$.
  Comme $s(u) \subseteq s(E)$ et $s(u') \subseteq s(E')$, on a le résultat.

  Exercice : Vérifier que $s(E).s(E') \subseteq s(E.E')$.

Lemme intermédiaire sur les ER

Lemme

Soit s une substitution régulière, et soient E et E' des expressions régulières sur V. Alors

$$\begin{aligned} s(E.E') &= s(E).s(E') \\ s(E+E') &= s(E) \cup s(E') \\ s(E^*) &= s(E)^* \end{aligned}$$

Preuve.

- Prouvons que $s(E.E') \subseteq s(E).s(E')$.

  Soit $w \in s(E.E')$. Il existe $v \in E.E'$ tel que $w \in s(v)$.
  Comme $v \in E.E'$, il existe $u \in E$ et $u' \in E'$ tels que $v = u.u'$.
  Donc $w \in s(u.u') = s(u).s(u')$.
  Comme $s(u) \subseteq s(E)$ et $s(u') \subseteq s(E')$, on a le résultat.

  Exercice : Vérifier que $s(E).s(E') \subseteq s(E.E')$.

- Idem pour $E + E'$ et E^*. (plus facile)

Preuve du théorème

Étapes :

1. On étend les substitutions régulières aux expressions régulières :
$$\forall \text{ ER } E \text{ sur } V,\ s(E) \stackrel{\text{def}}{=} s(\mathcal{L}(E)).$$
2. On prouve que si E est une expression régulière sur V, alors il existe une expression régulière E' sur W telle que $s(E) = \mathcal{L}(E')$.

Preuve du théorème

Étapes :

1. On étend les substitutions régulières aux expressions régulières :
$$\forall \text{ ER } E \text{ sur } V,\ s(E) \stackrel{\text{def}}{=} s(\mathcal{L}(E)).$$

2. On prouve que si E est une expression régulière sur V, alors il existe une expression régulière E' sur W telle que $s(E) = \mathcal{L}(E')$.

Preuve du théorème de l'étape 2.
Par induction structurelle :

Preuve du théorème

Étapes :

1. On étend les substitutions régulières aux expressions régulières :
$$\forall \text{ ER } E \text{ sur } V,\ s(E) \stackrel{\text{def}}{=} s(\mathcal{L}(E)).$$

2. On prouve que si E est une expression régulière sur V, alors il existe une expression régulière E' sur W telle que $s(E) = \mathcal{L}(E')$.

Preuve du théorème de l'étape 2.

Par induction structurelle :

Base Pour $E \in \{\varnothing, \epsilon, a\}$, OK : $\emptyset$, $\{\varepsilon\}$ et $s(a)$
($s(a)$ régulier donc représentable par ER)

Preuve du théorème

Étapes :

1. On étend les substitutions régulières aux expressions régulières :
$$\forall \text{ ER } E \text{ sur } V,\ s(E) \stackrel{\text{def}}{=} s(\mathcal{L}(E)).$$

2. On prouve que si E est une expression régulière sur V, alors il existe une expression régulière E' sur W telle que $s(E) = \mathcal{L}(E')$.

Preuve du théorème de l'étape 2.

Par induction structurelle :

Base Pour $E \in \{\varnothing, \epsilon, a\}$, OK : $\emptyset$, $\{\varepsilon\}$ et $s(a)$
($s(a)$ régulier donc représentable par ER)

Induction Pour $E \in \{E_1.E_2,\ E_1 + E_2,\ {E_1}^*\}$, cf lemme précédent

Homomorphismes

Définition

Une substitution régulière qui à tout $a \in V$ associe un singleton est un homomorphisme.

Homomorphismes

Définition

Une substitution régulière qui à tout $a \in V$ associe un singleton est un homomorphisme.

Exemple

$$\begin{array}{rcl} L & = & \left\{ab^i \;\middle|\; i \geq 0\right\} \\ s(a) & = & \{cdc\} \\ s(b) & = & \{dc\} \end{array}$$

Alors $s(L) = \left\{cdc(dc)^i \;\middle|\; i \geq 0\right\}$

Homomorphismes

Définition

Une substitution régulière qui à tout $a \in V$ associe un singleton est un homomorphisme.

Exemple

$$\begin{array}{rcl} L & = & \left\{ab^i \mid i \geq 0\right\} = ab^* \\ s(a) & = & \{cdc\} \\ s(b) & = & \{dc\} \end{array}$$

Alors $s(L) = \left\{cdc(dc)^i \mid i \geq 0\right\}$

Homomorphismes

Définition

Une substitution régulière qui à tout $a \in V$ associe un singleton est un homomorphisme.

Exemple

$$\begin{array}{rcl} L & = & \left\{ab^i \mid i \geq 0\right\} = ab^* \\ s(a) & = & \{cdc\} = cdc \\ s(b) & = & \{dc\} \end{array}$$

Alors $s(L) = \left\{cdc(dc)^i \mid i \geq 0\right\}$

Homomorphismes

Définition

Une substitution régulière qui à tout $a \in V$ associe un singleton est un homomorphisme.

Exemple

$$\begin{array}{rcl} L & = & \left\{ab^i \mid i \geq 0\right\} = ab^* \\ s(a) & = & \{cdc\} = cdc \\ s(b) & = & \{dc\} = dc \end{array}$$

Alors $s(L) = \left\{cdc(dc)^i \mid i \geq 0\right\}$

Homomorphismes

Définition

Une substitution régulière qui à tout $a \in V$ associe un singleton est un homomorphisme.

Exemple

$$\begin{array}{rcl} L & = & \left\{ab^i \;\middle|\; i \geq 0\right\} = ab^* \\ s(a) & = & \{cdc\} = cdc \\ s(b) & = & \{dc\} = dc \end{array}$$

Alors $s(L) = \left\{cdc(dc)^i \;\middle|\; i \geq 0\right\} = cdc(dc)^* = c(dc)^+$

Homomorphismes

Définition

Une substitution régulière qui à tout $a \in V$ associe un singleton est un homomorphisme.

Exemple

$$\begin{array}{rcl} L & = & \left\{ab^i \mid i \geq 0\right\} = ab^* \\ s(a) & = & \{cdc\} = cdc \\ s(b) & = & \{dc\} = dc \end{array}$$

Alors $s(L) = \left\{cdc(dc)^i \mid i \geq 0\right\} = cdc(dc)^* = c(dc)^+$

Corollaire

La classe des langages réguliers est fermée par homomorphisme.

Homomorphismes

Définition

Une substitution régulière qui à tout $a \in V$ associe un singleton est un homomorphisme.

Exemple

$$\begin{array}{rcl} L & = & \left\{ ab^i \;\middle|\; i \geq 0 \right\} = ab^* \\ s(a) & = & \{cdc\} = cdc \\ s(b) & = & \{dc\} = dc \end{array}$$

Alors $s(L) = \left\{ cdc(dc)^i \;\middle|\; i \geq 0 \right\} = cdc(dc)^* = c(dc)^+$

Corollaire

La classe des langages réguliers est fermée par homomorphisme.
(et par homomorphisme inverse, voir poly §2.3)

Stabilité des langages réguliers

Théorème

La classe des langages réguliers est fermée par :

- *union, concaténation et concaténation itérée (cf. cours 3)*
- *substitution régulière et homomorphisme*

Stabilité des langages réguliers

Théorème

La classe des langages réguliers est fermée par :

- *union, concaténation et concaténation itérée (cf. cours 3)*
- *substitution régulière et homomorphisme*
- *complémentation*

Complémentation

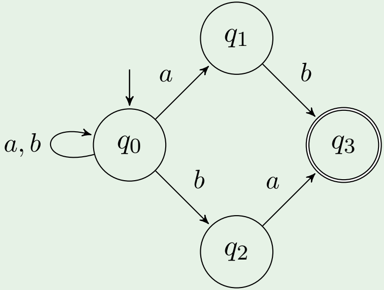
Question : si L est un langage régulier, peut-on construire un automate qui reconnaît $\overline{L} = V^* \setminus L$?

Complémentation

Question : si L est un langage régulier, peut-on construire un automate qui reconnaît $\overline{L} = V^* \setminus L$?

Exemple

$L = (a+b)^*(ab+ba)$

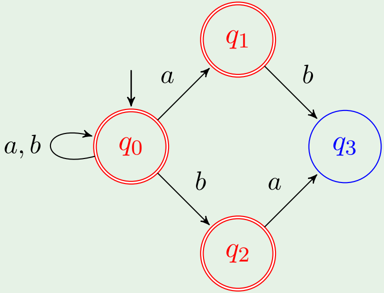


Complémentation

Question : si L est un langage régulier, peut-on construire un automate qui reconnaît $\overline{L} = V^* \setminus L$?

Exemple

$L = (a+b)^*(ab+ba)$

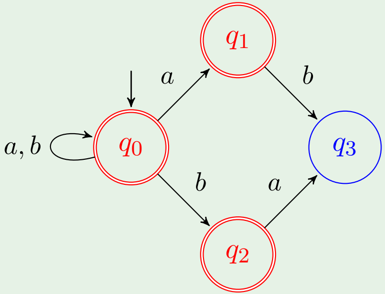


Complémentation

Question : si L est un langage régulier, peut-on construire un automate qui reconnaît $\overline{L} = V^* \setminus L$?

Exemple

$L = (a+b)^*(ab+ba)$



$\mathcal{L}(A') = (a+b)^*$ perdu...

Complémentation (suite)

Problème : on ne peut pas intervertir F et $Q \setminus F$ car
il peut y avoir deux chemins de même trace dans un AFND,
et si l'un mène en F mais pas l'autre on accepte...

Complémentation (suite)

Problème : on ne peut pas intervertir F et $Q \setminus F$ car

il peut y avoir deux chemins de même trace dans un AFND,

et si l'un mène en F mais pas l'autre on accepte...

Solution : On déterminise...

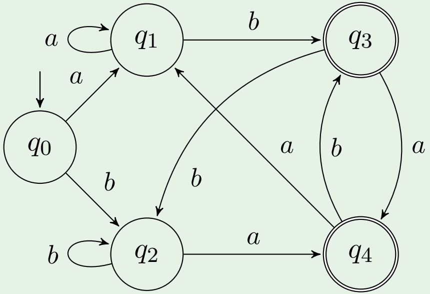
Complémentation (suite)

Problème : on ne peut pas intervertir F et $Q \setminus F$ car
il peut y avoir deux chemins de même trace dans un AFND,
et si l'un mène en F mais pas l'autre on accepte...

Solution : On déterminise...

Exemple

$L = (a+b)^*(ab+ba)$

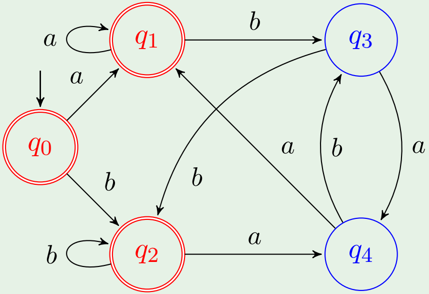


Complémentation (suite)

Problème : on ne peut pas intervertir F et $Q \setminus F$ car
il peut y avoir deux chemins de même trace dans un AFND,
et si l'un mène en F mais pas l'autre on accepte...
Solution : On déterminise...

Exemple

$L = (a+b)^*(ab+ba)$



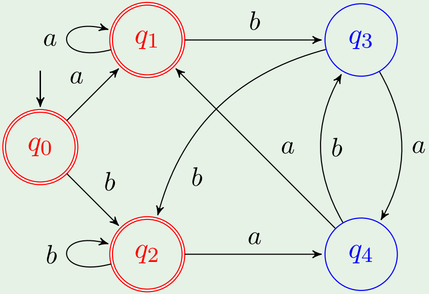
Complémentation (suite)

Problème : on ne peut pas intervertir F et $Q \setminus F$ car
il peut y avoir deux chemins de même trace dans un AFND,
et si l'un mène en F mais pas l'autre on accepte...

Solution : On déterminise...

Exemple

$L = (a+b)^*(ab+ba)$



Gagné !

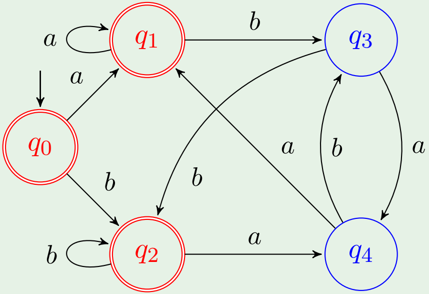
Exercice : déterminer l'ER associée à cet automate

Complémentation (suite)

Problème : on ne peut pas intervertir F et $Q \setminus F$ car
il peut y avoir deux chemins de même trace dans un AFND,
et si l'un mène en F mais pas l'autre on accepte...
Solution : On déterminise...

Exemple

$L = (a + b)^*(ab + ba)$



Gagné !

Exercice : déterminer l'ER associée à cet automate

Remarque : même problème et même solution s'il manque des chemins

Complémentation (fin)

Proposition

La classe des langages réguliers est fermée par complémentation.

Complémentation (fin)

Proposition

La classe des langages réguliers est fermée par complémentation.

Preuve. Soit L un langage régulier et considérons $A = \langle Q, V, \delta, \{q_0\}, F\rangle$ un automate fini déterministe complet tel que $\mathcal{L}(A) = L$.

Complémentation (fin)

Proposition

La classe des langages réguliers est fermée par complémentation.

Preuve. Soit L un langage régulier et considérons $A = \langle Q, V, \delta, \{q_0\}, F \rangle$ un automate fini déterministe complet tel que $\mathcal{L}(A) = L$.

Posons $A' \stackrel{\text{def}}{=} \langle Q, V, \delta, \{q_0\}, Q \setminus F \rangle$.

Complémentation (fin)

Proposition

La classe des langages réguliers est fermée par complémentation.

Preuve. Soit L un langage régulier et considérons $A = \langle Q, V, \delta, \{q_0\}, F\rangle$ un automate fini déterministe complet tel que $\mathcal{L}(A) = L$.

Posons $A' \stackrel{\text{def}}{=} \langle Q, V, \delta, \{q_0\}, Q \setminus F\rangle$.
A' étant déterministe complet, on a :

$$w \in \mathcal{L}(A') \;\Leftrightarrow\; \delta^*(q_0, w) \in Q \setminus F \;\Leftrightarrow\; \delta^*(q_0, w) \notin F \;\Leftrightarrow\; w \notin \mathcal{L}(A)$$

Stabilité des langages réguliers

Théorème

La classe des langages réguliers est fermée par :

- *union, concaténation et concaténation itérée (cf. cours 3)*
- *substitution régulière et homomorphisme*
- *complémentation*

Stabilité des langages réguliers

Théorème

La classe des langages réguliers est fermée par :

- *union, concaténation et concaténation itérée (cf. cours 3)*
- *substitution régulière et homomorphisme*
- *complémentation*
- *intersection, différence*

Stabilité des langages réguliers

Théorème

La classe des langages réguliers est fermée par :

- *union, concaténation et concaténation itérée (cf. cours 3)*
- *substitution régulière et homomorphisme*
- *complémentation*
- *intersection, différence*

Preuve :

$$\begin{aligned} L \cap M &= \overline{\overline{L} \cup \overline{M}} \\ L \setminus M &= L \cap \overline{M} \end{aligned}$$

Stabilité des langages réguliers

Théorème

La classe des langages réguliers est fermée par :

- *union, concaténation et concaténation itérée (cf. cours 3)*
- *substitution régulière et homomorphisme*
- *complémentation*
- *intersection, différence*

Preuve :

$$\begin{aligned} L \cap M &= \overline{\overline{L} \cup \overline{M}} \\ L \setminus M &= L \cap \overline{M} \end{aligned}$$

Attention : les inclusions ne donnent rien !

L régulier et $L \subset M \not\Longrightarrow M$ régulier — penser à $L = \emptyset$

M régulier et $L \subset M \not\Longrightarrow L$ régulier — penser à $M = V^*$

Langages non-réguliers

Question : comment prouver qu'un langage n'est pas régulier ?

Autrement dit : Étant donné un langage L, comment prouver que pour tout automate fini A, $\mathcal{L}(A) \neq L$?

Langages non-réguliers

Question : comment prouver qu'un langage n'est pas régulier ?
Autrement dit : Étant donné un langage L, comment prouver que pour tout automate fini A, $\mathcal{L}(A) \neq L$?

Idée : Utiliser des propriétés de fermeture

Supposons donné un langage M dont on connaît la non-régularité.

Pour prouver que L n'est pas régulier, on peut procéder par l'absurde :

Langages non-réguliers

Question : comment prouver qu'un langage n'est pas régulier ?
Autrement dit : Étant donné un langage L, comment prouver que pour tout automate fini A, $\mathcal{L}(A) \neq L$?

Idée : Utiliser des propriétés de fermeture

Supposons donné un langage M dont on connaît la non-régularité.

Pour prouver que L n'est pas régulier, on peut procéder par l'absurde :

1. On suppose que L est régulier.

Langages non-réguliers

Question : comment prouver qu'un langage n'est pas régulier ?
Autrement dit : Étant donné un langage L, comment prouver que pour tout automate fini A, $\mathcal{L}(A) \neq L$?

Idée : Utiliser des propriétés de fermeture

Supposons donné un langage M dont on connaît la non-régularité.

Pour prouver que L n'est pas régulier, on peut procéder par l'absurde :

1. On suppose que L est régulier.
2. On exhibe une série de transformations qui préservent la régularité et qui permettent de passer de L à M.

Langages non-réguliers

Question : comment prouver qu'un langage n'est pas régulier ?
Autrement dit : Étant donné un langage L, comment prouver que pour tout automate fini A, $\mathcal{L}(A) \neq L$?

Idée : Utiliser des propriétés de fermeture

Supposons donné un langage M dont on connaît la non-régularité.

Pour prouver que L n'est pas régulier, on peut procéder par l'absurde :

1. On suppose que L est régulier.
2. On exhibe une série de transformations qui préservent la régularité et qui permettent de passer de L à M.
3. Donc M devrait être régulier.
   Contradiction : l'hypothèse que L était régulier est fausse.

Langages non-réguliers

Question : comment prouver qu'un langage n'est pas régulier ?
Autrement dit : Étant donné un langage L, comment prouver que pour tout automate fini A, $\mathcal{L}(A) \neq L$?

Idée : Utiliser des propriétés de fermeture

Supposons donné un langage M dont on connaît la non-régularité.

Pour prouver que L n'est pas régulier, on peut procéder par l'absurde :

1. On suppose que L est régulier.
2. On exhibe une série de transformations qui préservent la régularité et qui permettent de passer de L à M.
3. Donc M devrait être régulier.
   Contradiction : l'hypothèse que L était régulier est fausse.

Cette technique de preuve est appelée réduction : on réduit le problème de la régularité de L à celle de M. (*cf.* TL2)

Exercice

On admet que $M = \{0^p 1^p \mid p \geq 0\}$ n'est pas régulier.

Montrer que $L = \{wcw' \mid w, w' \in \{a,b\}^*, |w|_a = |w'|_b\}$ n'est pas régulier.

Exercice

On admet que $M = \{0^p 1^p \mid p \geq 0\}$ n'est pas régulier.

Montrer que $L = \{wcw' \mid w, w' \in \{a,b\}^*, |w|_a = |w'|_b\}$ n'est pas régulier.

1. Supposons que L est régulier.

Exercice

On admet que $M = \{0^p 1^p \mid p \geq 0\}$ n'est pas régulier.

Montrer que $L = \{wcw' \mid w, w' \in \{a,b\}^*, |w|_a = |w'|_b\}$ n'est pas régulier.

1. Supposons que L est régulier.
2. Alors $L' \stackrel{\text{def}}{=} L \cap a^*cb^* = L \cap \{a^p cb^q \mid p, q \geq 0\} = \{a^p cb^p \mid p \geq 0\}$ est nécessairement régulier.

Exercice

On admet que $M = \{0^p 1^p \mid p \geq 0\}$ n'est pas régulier.

Montrer que $L = \{wcw' \mid w, w' \in \{a,b\}^*, |w|_a = |w'|_b\}$ n'est pas régulier.

1. Supposons que L est régulier.
2. Alors $L' \stackrel{\mathsf{def}}{=} L \cap a^*cb^* = L \cap \{a^p cb^q \mid p, q \geq 0\} = \{a^p cb^p \mid p \geq 0\}$ est nécessairement régulier.

2'. Soit l'homomorphisme h défini par :

$$h : \begin{cases} a & \rightarrow & 0 \\ b & \rightarrow & 1 \\ c & \rightarrow & \varepsilon \end{cases}$$

Exercice

On admet que $M = \{0^p 1^p \mid p \geq 0\}$ n'est pas régulier.

Montrer que $L = \{wcw' \mid w, w' \in \{a,b\}^*, |w|_a = |w'|_b\}$ n'est pas régulier.

1. Supposons que L est régulier.
2. Alors $L' \stackrel{\text{def}}{=} L \cap a^*cb^* = L \cap \{a^p cb^q \mid p, q \geq 0\} = \{a^p cb^p \mid p \geq 0\}$ est nécessairement régulier.

2'. Soit l'homomorphisme h défini par :

$$h : \begin{cases} a & \rightarrow & 0 \\ b & \rightarrow & 1 \\ c & \rightarrow & \varepsilon \end{cases}$$

Le langage $h(L')$ est nécessairement régulier.

Exercice

On admet que $M = \{0^p 1^p \mid p \geq 0\}$ n'est pas régulier.

Montrer que $L = \{wcw' \mid w, w' \in \{a,b\}^*, |w|_a = |w'|_b\}$ n'est pas régulier.

1. Supposons que L est régulier.
2. Alors $L' \stackrel{\text{def}}{=} L \cap a^*cb^* = L \cap \{a^p c b^q \mid p, q \geq 0\} = \{a^p c b^p \mid p \geq 0\}$ est nécessairement régulier.

2'. Soit l'homomorphisme h défini par :

$$h : \begin{cases} a & \rightarrow & 0 \\ b & \rightarrow & 1 \\ c & \rightarrow & \varepsilon \end{cases}$$

Le langage $h(L')$ est nécessairement régulier.

3. Mais $h(L') = M$, contradiction.

Un premier langage non-régulier

Pour utiliser les propriétés de fermeture, il faut connaître au moins un langage M non-régulier.

Un premier langage non-régulier

Pour utiliser les propriétés de fermeture, il faut connaître au moins un langage M non-régulier.

Question : comment prouver que M n'est pas régulier ?

Un premier langage non-régulier

Pour utiliser les propriétés de fermeture, il faut connaître au moins un langage M non-régulier.

Question : comment prouver que M n'est pas régulier ?

- En se servant d'une condition nécessaire sur les langages réguliers qui permettra de refaire un raisonnement par l'absurde

Un premier langage non-régulier

Pour utiliser les propriétés de fermeture, il faut connaître au moins un langage M non-régulier.

Question : comment prouver que M n'est pas régulier ?

- En se servant d'une condition nécessaire sur les langages réguliers qui permettra de refaire un raisonnement par l'absurde
- On va supposer qu'il existe un automate fini A tel que $\mathcal{L}(A) = M$ et tenter d'aboutir à une contradiction

Un premier langage non-régulier

Pour utiliser les propriétés de fermeture, il faut connaître au moins un langage M non-régulier.

Question : comment prouver que M n'est pas régulier ?

- En se servant d'une condition nécessaire sur les langages réguliers qui permettra de refaire un raisonnement par l'absurde
- On va supposer qu'il existe un automate fini A tel que $\mathcal{L}(A) = M$ et tenter d'aboutir à une contradiction
- La condition nécessaire la plus standard est donnée par le lemme de l'étoile

Un premier langage non-régulier

Pour utiliser les propriétés de fermeture, il faut connaître au moins un langage M non-régulier.

Question : comment prouver que M n'est pas régulier ?

- En se servant d'une condition nécessaire sur les langages réguliers qui permettra de refaire un raisonnement par l'absurde
- On va supposer qu'il existe un automate fini A tel que $\mathcal{L}(A) = M$ et tenter d'aboutir à une contradiction
- La condition nécessaire la plus standard est donnée par le lemme de l'étoile

(lemme de pompage, de la pompe, *pumping lemma*)

Principe du lemme de l'étoile

Soit $A = \langle Q, V, \delta, I, F \rangle$ un automate *sans ε-transition*, avec $|Q| = n \geq 1$.
Soit $z = z_1 \cdots z_m$ un mot sur V de longueur $m \geq n$ reconnu par A.

Principe du lemme de l'étoile

Soit $A = \langle Q, V, \delta, I, F \rangle$ un automate *sans ε-transition*, avec $|Q| = n \geq 1$.
Soit $z = z_1 \cdots z_m$ un mot sur V de longueur $m \geq n$ reconnu par A.
Il existe donc un chemin $(q_0, z_1, q_1) \cdots (q_{m-1}, z_m, q_m)$ dans A,
avec $q_0 \in I$ et $q_m \in F$.

Principe du lemme de l'étoile

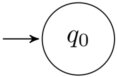
Soit $A = \langle Q, V, \delta, I, F \rangle$ un automate *sans ε-transition*, avec $|Q| = n \geq 1$.
Soit $z = z_1 \cdots z_m$ un mot sur V de longueur $m \geq n$ reconnu par A.
Il existe donc un chemin $(q_0, z_1, q_1) \cdots (q_{m-1}, z_m, q_m)$ dans A,
avec $q_0 \in I$ et $q_m \in F$.
Il y a $m + 1$ états dans ce chemin et n états dans Q, et $m + 1 > n$
donc $\exists j, k$ tels que $0 \leq j < k \leq m$ et $q_j = q_k$

Principe du lemme de l'étoile

Soit $A = \langle Q, V, \delta, I, F \rangle$ un automate *sans ε-transition*, avec $|Q| = n \geq 1$.
Soit $z = z_1 \cdots z_m$ un mot sur V de longueur $m \geq n$ reconnu par A.
Il existe donc un chemin $(q_0, z_1, q_1) \cdots (q_{m-1}, z_m, q_m)$ dans A,
avec $q_0 \in I$ et $q_m \in F$.
Il y a $m + 1$ états dans ce chemin et n états dans Q, et $m + 1 > n$
donc $\exists j, k$ tels que $0 \leq j < k \leq n$ et $q_j = q_k$

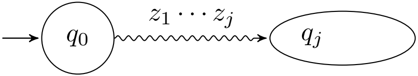
Principe du lemme de l'étoile

Soit $A = \langle Q, V, \delta, I, F \rangle$ un automate *sans ε-transition*, avec $|Q| = n \geq 1$.
Soit $z = z_1 \cdots z_m$ un mot sur V de longueur $m \geq n$ reconnu par A.
Il existe donc un chemin $(q_0, z_1, q_1) \cdots (q_{m-1}, z_m, q_m)$ dans A,
avec $q_0 \in I$ et $q_m \in F$.
Il y a $m + 1$ états dans ce chemin et n états dans Q, et $m + 1 > n$
donc $\exists j, k$ tels que $0 \leq j < k \leq n$ et $q_j = q_k$



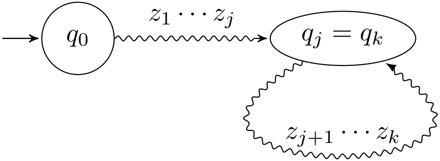
Principe du lemme de l'étoile

Soit $A = \langle Q, V, \delta, I, F \rangle$ un automate *sans ε-transition*, avec $|Q| = n \geq 1$.
Soit $z = z_1 \cdots z_m$ un mot sur V de longueur $m \geq n$ reconnu par A.
Il existe donc un chemin $(q_0, z_1, q_1) \cdots (q_{m-1}, z_m, q_m)$ dans A,
avec $q_0 \in I$ et $q_m \in F$.
Il y a $m + 1$ états dans ce chemin et n états dans Q, et $m + 1 > n$
donc $\exists j, k$ tels que $0 \leq j < k \leq n$ et $q_j = q_k$



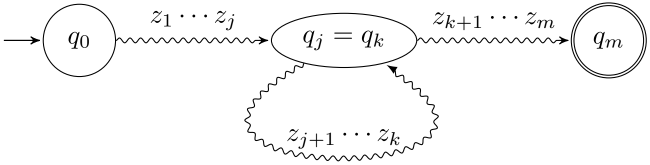
Principe du lemme de l'étoile

Soit $A = \langle Q, V, \delta, I, F \rangle$ un automate *sans ε-transition*, avec $|Q| = n \geq 1$.
Soit $z = z_1 \cdots z_m$ un mot sur V de longueur $m \geq n$ reconnu par A.
Il existe donc un chemin $(q_0, z_1, q_1) \cdots (q_{m-1}, z_m, q_m)$ dans A,
avec $q_0 \in I$ et $q_m \in F$.
Il y a $m + 1$ états dans ce chemin et n états dans Q, et $m + 1 > n$
donc $\exists j, k$ tels que $0 \leq j < k \leq n$ et $q_j = q_k$



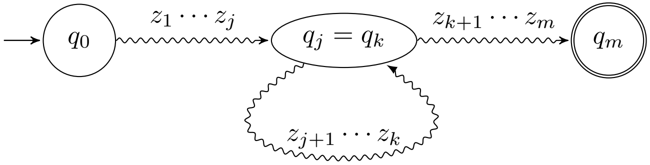
Principe du lemme de l'étoile

Soit $A = \langle Q, V, \delta, I, F \rangle$ un automate *sans ε-transition*, avec $|Q| = n \geq 1$.
Soit $z = z_1 \cdots z_m$ un mot sur V de longueur $m \geq n$ reconnu par A.
Il existe donc un chemin $(q_0, z_1, q_1) \cdots (q_{m-1}, z_m, q_m)$ dans A,
avec $q_0 \in I$ et $q_m \in F$.
Il y a $m + 1$ états dans ce chemin et n états dans Q, et $m + 1 > n$
donc $\exists j, k$ tels que $0 \leq j < k \leq n$ et $q_j = q_k$



Principe du lemme de l'étoile

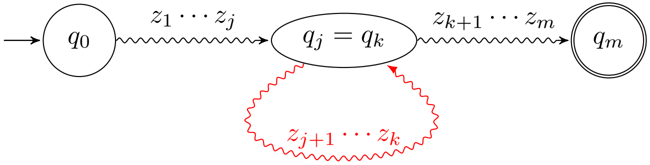
Soit $A = \langle Q, V, \delta, I, F \rangle$ un automate *sans ε-transition*, avec $|Q| = n \geq 1$.
Soit $z = z_1 \cdots z_m$ un mot sur V de longueur $m \geq n$ reconnu par A.
Il existe donc un chemin $(q_0, z_1, q_1) \cdots (q_{m-1}, z_m, q_m)$ dans A,
avec $q_0 \in I$ et $q_m \in F$.
Il y a $m+1$ états dans ce chemin et n états dans Q, et $m+1 > n$
donc $\exists j, k$ tels que $0 \leq j < k \leq n$ et $q_j = q_k$



$$z_1 \cdots z_j z_{j+1} \cdots z_k z_{k+1} \cdots z_m \in \mathcal{L}(A)$$

Principe du lemme de l'étoile

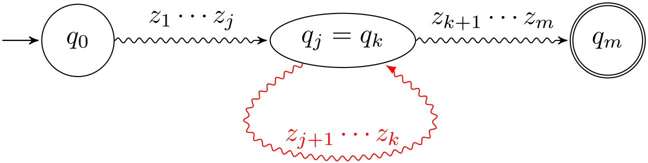
Soit $A = \langle Q, V, \delta, I, F \rangle$ un automate *sans ε-transition*, avec $|Q| = n \geq 1$.
Soit $z = z_1 \cdots z_m$ un mot sur V de longueur $m \geq n$ reconnu par A.
Il existe donc un chemin $(q_0, z_1, q_1) \cdots (q_{m-1}, z_m, q_m)$ dans A,
avec $q_0 \in I$ et $q_m \in F$.
Il y a $m+1$ états dans ce chemin et n états dans Q, et $m+1 > n$
donc $\exists j, k$ tels que $0 \leq j < k \leq n$ et $q_j = q_k$



$$z_1 \cdots z_j (z_{j+1} \cdots z_k)^2 z_{k+1} \cdots z_m \in \mathcal{L}(A)$$

Principe du lemme de l'étoile

Soit $A = \langle Q, V, \delta, I, F \rangle$ un automate *sans ε-transition*, avec $|Q| = n \geq 1$.
Soit $z = z_1 \cdots z_m$ un mot sur V de longueur $m \geq n$ reconnu par A.
Il existe donc un chemin $(q_0, z_1, q_1) \cdots (q_{m-1}, z_m, q_m)$ dans A,
avec $q_0 \in I$ et $q_m \in F$.
Il y a $m + 1$ états dans ce chemin et n états dans Q, et $m + 1 > n$
donc $\exists j, k$ tels que $0 \leq j < k \leq n$ et $q_j = q_k$



$\forall i \geq 0,\ z_1 \cdots z_j (z_{j+1} \cdots z_k)^i z_{k+1} \cdots z_m \in \mathcal{L}(A)$

Énoncé du lemme de l'étoile

Lemme

Soit L un langage régulier. Alors il existe $n \geq 1$ tel que pour tout mot z, si $z \in L$ et $|z| \geq n$, alors z est de la forme uvw avec :

- $|uv| \leq n$
- $|v| \geq 1$
- $\forall i \geq 0, uv^iw \in L$

Énoncé du lemme de l'étoile

Lemme

Soit L un langage régulier. Alors il existe $n \geq 1$ tel que pour tout mot z, si $z \in L$ et $|z| \geq n$, alors z est de la forme uvw avec :

- $|uv| \leq n$
- $|v| \geq 1$
- $\forall i \geq 0, uv^iw \in L \qquad \iff \; uv^*w \subseteq L$

Énoncé du lemme de l'étoile

Lemme

Soit L un langage régulier. Alors il existe $n \geq 1$ tel que
pour tout mot z, si $z \in L$ et $|z| \geq n$, alors z est de la forme uvw avec :

- $|uv| \leq n$
- $|v| \geq 1$
- $\forall i \geq 0, uv^iw \in L \qquad \iff \quad uv^*w \subseteq L$

Attention

Le lemme de l'étoile est une condition nécessaire mais non suffisante des langages réguliers : il existe des langages non-réguliers qui le satisfont.

Énoncé du lemme de l'étoile

Lemme

Soit L un langage régulier. Alors il existe $n \geq 1$ tel que pour tout mot z, si $z \in L$ et $|z| \geq n$, alors z est de la forme uvw avec :

- $|uv| \leq n$
- $|v| \geq 1$
- $\forall i \geq 0, uv^iw \in L \qquad \iff \quad uv^*w \subseteq L$

Attention

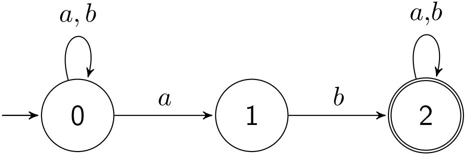
Le lemme de l'étoile est une condition nécessaire mais non suffisante des langages réguliers : il existe des langages non-réguliers qui le satisfont.

Remarques

- *Que se passe-t-il pour les langages finis ?*
- *Des lemmes de l'étoile existent aussi pour d'autres classes de langages.*

Illustrations

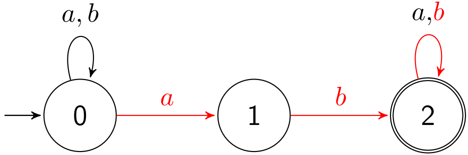
- Pour le langage V^*abV^* (les mots qui contiennent ab) :



On a $n = 3$ (nombre d'états de l'automate).

Illustrations

- Pour le langage V^*abV^* (les mots qui contiennent ab) :

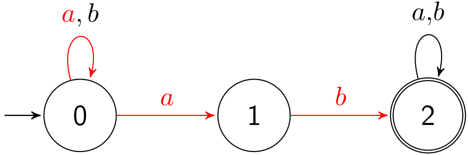


On a $n = 3$ (nombre d'états de l'automate).

Pour $z = abb$, le chemin acceptant dans l'automate donne $u = ab$, $v = b$, $w = \varepsilon$.

Illustrations

- Pour le langage V^*abV^* (les mots qui contiennent ab) :



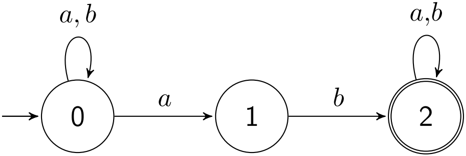
On a $n = 3$ (nombre d'états de l'automate).

Pour $z = abb$, le chemin acceptant dans l'automate donne $u = ab$, $v = b$, $w = \varepsilon$.

Pour $z = aab$, le chemin acceptant dans l'automate donne $u = \varepsilon$, $v = a$, $w = ab$.

Illustrations

- Pour le langage V^*abV^* (les mots qui contiennent ab) :



On a $n = 3$ (nombre d'états de l'automate).

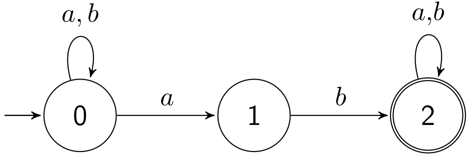
Pour $z = abb$, le chemin acceptant dans l'automate donne $u = ab$, $v = b$, $w = \varepsilon$.

Pour $z = aab$, le chemin acceptant dans l'automate donne $u = \varepsilon$, $v = a$, $w = ab$.

Et pour $z = aabb$?

Illustrations

- Pour le langage V^*abV^* (les mots qui contiennent ab) :



On a $n = 3$ (nombre d'états de l'automate).

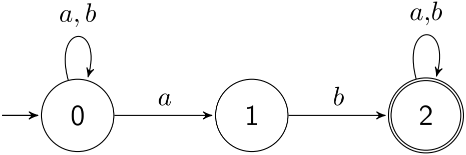
Pour $z = abb$, le chemin acceptant dans l'automate donne $u = ab$, $v = b$, $w = \varepsilon$.

Pour $z = aab$, le chemin acceptant dans l'automate donne $u = \varepsilon$, $v = a$, $w = ab$.

Et pour $z = aabb$? 2 découpages mais un seul vérifie $|uv| \leq n$!

Illustrations

- Pour le langage V^*abV^* (les mots qui contiennent ab) :



On a $n = 3$ (nombre d'états de l'automate).

Pour $z = abb$, le chemin acceptant dans l'automate donne $u = ab$, $v = b$, $w = \varepsilon$.

Pour $z = aab$, le chemin acceptant dans l'automate donne $u = \varepsilon$, $v = a$, $w = ab$.

Et pour $z = aabb$? 2 découpages mais un seul vérifie $|uv| \leq n$!

- Pour le langage $\{ab\}$: même automate, moins les boucles.
On a $n = 3$ et il n'existe pas de mot $z \in \{ab\}$ tel que $|z| \geq 3$.
Le lemme de l'étoile est vrai par vacuité.

Comment se servir du lemme de l'étoile ?

On procède par l'absurde : on suppose que L est régulier et satisfait donc le lemme de l'étoile.

Comment se servir du lemme de l'étoile ?

On procède par l'absurde : on suppose que L est régulier et satisfait donc le lemme de l'étoile.

- On considère l'entier n du lemme. (on ne sait rien de sa valeur)

Comment se servir du lemme de l'étoile ?

On procède par l'absurde : on suppose que L est régulier et satisfait donc le lemme de l'étoile.

- On considère l'entier n du lemme. (on ne sait rien de sa valeur)
- On choisit un mot $z \in L$ de longueur au moins n. (z dépendra de n)

Comment se servir du lemme de l'étoile ?

On procède par l'absurde : on suppose que L est régulier et satisfait donc le lemme de l'étoile.

- On considère l'entier n du lemme. (on ne sait rien de sa valeur)
- On choisit un mot $z \in L$ de longueur au moins n. (z dépendra de n)
- Le mot z est décomposé en uvw, où $|uv| \leq n$ et $|v| \geq 1$.
  (on ne contrôle pas la façon dont z est décomposé, hormis la contrainte sur les longueurs)

Comment se servir du lemme de l'étoile ?

On procède par l'absurde : on suppose que L est régulier et satisfait donc le lemme de l'étoile.

- On considère l'entier n du lemme. (on ne sait rien de sa valeur)
- On choisit un mot $z \in L$ de longueur au moins n. (z dépendra de n)
- Le mot z est décomposé en uvw, où $|uv| \leq n$ et $|v| \geq 1$.
  (on ne contrôle pas la façon dont z est décomposé, hormis la contrainte sur les longueurs)
- On choisit une valeur de i telle que $uv^iw \notin L$.

Comment se servir du lemme de l'étoile ?

On procède par l'absurde : on suppose que L est régulier et satisfait donc le lemme de l'étoile.

- On considère l'entier n du lemme. (on ne sait rien de sa valeur)
- On choisit un mot $z \in L$ de longueur au moins n. (z dépendra de n)
- Le mot z est décomposé en uvw, où $|uv| \leq n$ et $|v| \geq 1$.
  (on ne contrôle pas la façon dont z est décomposé,
  hormis la contrainte sur les longueurs)
- On choisit une valeur de i telle que $uv^iw \notin L$.

On obtient une contradiction : L ne peut pas être régulier.

Comment se servir du lemme de l'étoile ?

On procède par l'absurde : on suppose que L est régulier et satisfait donc le lemme de l'étoile.

- On considère l'entier n du lemme. (on ne sait rien de sa valeur)
- On choisit un mot $z \in L$ de longueur au moins n. (z dépendra de n)
- Le mot z est décomposé en uvw, où $|uv| \leq n$ et $|v| \geq 1$.
  (on ne contrôle pas la façon dont z est décomposé, hormis la contrainte sur les longueurs)
- On choisit une valeur de i telle que $uv^iw \notin L$.

On obtient une contradiction : L ne peut pas être régulier.

Remarque

On utilise en fait la contraposée du lemme de l'étoile :

$$L \textit{ régulier} \quad \Rightarrow \quad \exists n \geq 1, \forall z \in L, \ldots$$

Comment se servir du lemme de l'étoile ?

On procède par l'absurde : on suppose que L est régulier et satisfait donc le lemme de l'étoile.

- On considère l'entier n du lemme. (on ne sait rien de sa valeur)
- On choisit un mot $z \in L$ de longueur au moins n. (z dépendra de n)
- Le mot z est décomposé en uvw, où $|uv| \leq n$ et $|v| \geq 1$.
  (on ne contrôle pas la façon dont z est décomposé,
  hormis la contrainte sur les longueurs)
- On choisit une valeur de i telle que $uv^iw \notin L$.

On obtient une contradiction : L ne peut pas être régulier.

Remarque

On utilise en fait la contraposée du lemme de l'étoile :

$$\begin{array}{rcl} L \textit{ régulier} & \Rightarrow & \exists n \geq 1, \forall z \in L, \ldots \\ \forall n \geq 1, \exists z \in L, \ldots & \Rightarrow & L \textit{ non régulier} \end{array}$$

Exemple

Montrer que $M = \{0^p 1^p \mid p \geq 0\}$ n'est pas régulier.

Exemple

Montrer que $M = \{0^p 1^p \mid p \geq 0\}$ n'est pas régulier.

On suppose que M est régulier et satisfait donc le lemme de l'étoile.

Exemple

Montrer que $M = \{0^p 1^p \mid p \geq 0\}$ n'est pas régulier.

On suppose que M est régulier et satisfait donc le lemme de l'étoile.

- Soit n l'entier du lemme. (on ne contrôle pas sa valeur)

Exemple

Montrer que $M = \{0^p 1^p \mid p \geq 0\}$ n'est pas régulier.

On suppose que M est régulier et satisfait donc le lemme de l'étoile.

- Soit n l'entier du lemme. (on ne contrôle pas sa valeur)
- On choisit $z = 0^n 1^n \in M$. On a $|z| = 2n \geq n$.

Exemple

Montrer que $M = \{0^p 1^p \mid p \geq 0\}$ n'est pas régulier.

On suppose que M est régulier et satisfait donc le lemme de l'étoile.

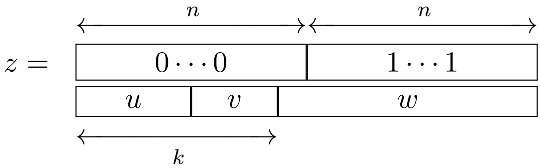
- Soit n l'entier du lemme. (on ne contrôle pas sa valeur)
- On choisit $z = 0^n 1^n \in M$. On a $|z| = 2n \geq n$.
- z est décomposé en uvw où $k \stackrel{\text{def}}{=} |uv| \leq n$ et $|v| \geq 1$.

Exemple

Montrer que $M = \{0^p 1^p \mid p \geq 0\}$ n'est pas régulier.

On suppose que M est régulier et satisfait donc le lemme de l'étoile.

- Soit n l'entier du lemme. (on ne contrôle pas sa valeur)
- On choisit $z = 0^n 1^n \in M$. On a $|z| = 2n \geq n$.
- z est décomposé en uvw où $k \stackrel{\text{def}}{=} |uv| \leq n$ et $|v| \geq 1$.

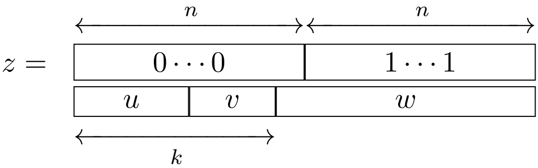


Exemple

Montrer que $M = \{0^p1^p \mid p \geq 0\}$ n'est pas régulier.

On suppose que M est régulier et satisfait donc le lemme de l'étoile.

- Soit n l'entier du lemme. (on ne contrôle pas sa valeur)
- On choisit $z = 0^n1^n \in M$. On a $|z| = 2n \geq n$.
- z est décomposé en uvw où $k \stackrel{\text{def}}{=} |uv| \leq n$ et $|v| \geq 1$.



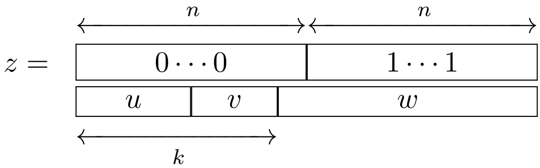
Comme $k \leq n$, on sait que $uv = 0^k$ sans pour autant connaître k !

Exemple

Montrer que $M = \{0^p 1^p \mid p \geq 0\}$ n'est pas régulier.

On suppose que M est régulier et satisfait donc le lemme de l'étoile.

- Soit n l'entier du lemme. (on ne contrôle pas sa valeur)
- On choisit $z = 0^n 1^n \in M$. On a $|z| = 2n \geq n$.
- z est décomposé en uvw où $k \overset{\text{def}}{=} |uv| \leq n$ et $|v| \geq 1$.



Comme $k \leq n$, on sait que $uv = 0^k$ sans pour autant connaître k !

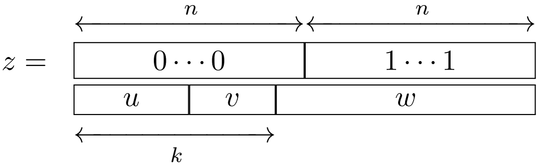
- On choisit $i = 0$, on devrait avoir $uv^0w = uw \in M$.

Exemple

Montrer que $M = \{0^p 1^p \mid p \geq 0\}$ n'est pas régulier.

On suppose que M est régulier et satisfait donc le lemme de l'étoile.

- Soit n l'entier du lemme. (on ne contrôle pas sa valeur)
- On choisit $z = 0^n 1^n \in M$. On a $|z| = 2n \geq n$.
- z est décomposé en uvw où $k \stackrel{\text{def}}{=} |uv| \leq n$ et $|v| \geq 1$.



  Comme $k \leq n$, on sait que $uv = 0^k$ sans pour autant connaître k !

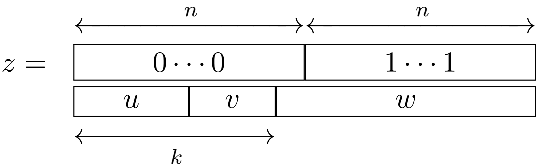
- On choisit $i = 0$, on devrait avoir $uv^0w = uw \in M$.
  Mais $uw = 0^{n-|v|}1^n \notin M$, contradiction.

Exemple

Montrer que $M = \{0^p 1^p \mid p \geq 0\}$ n'est pas régulier.

On suppose que M est régulier et satisfait donc le lemme de l'étoile.

- Soit n l'entier du lemme. (on ne contrôle pas sa valeur)
- On choisit $z = 0^n 1^n \in M$. On a $|z| = 2n \geq n$.
- z est décomposé en uvw où $k \stackrel{\text{def}}{=} |uv| \leq n$ et $|v| \geq 1$.



  Comme $k \leq n$, on sait que $uv = 0^k$ sans pour autant connaître k !

- On choisit $i = 0$, on devrait avoir $uv^0w = uw \in M$.
  Mais $uw = 0^{n-|v|}1^n \notin M$, contradiction.

Conclusion : M n'est pas régulier.