Théorie des Langages 1

Cours 4 : minimisation

L. Rieg

Grenoble INP - Ensimag, 1re année

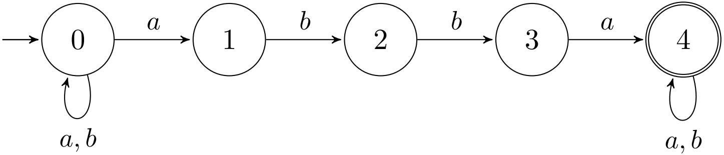
Année 2023-2024

De la déterminisation à la minimisation : exercice

On considère le langage

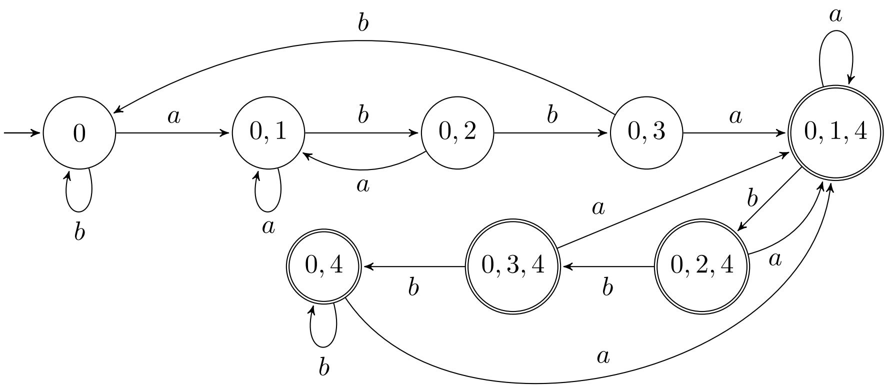
$$L = \{w \in V^* \mid w \text{ contient le motif } abba\}$$

Voici un automate non-déterministe qui le reconnaît :

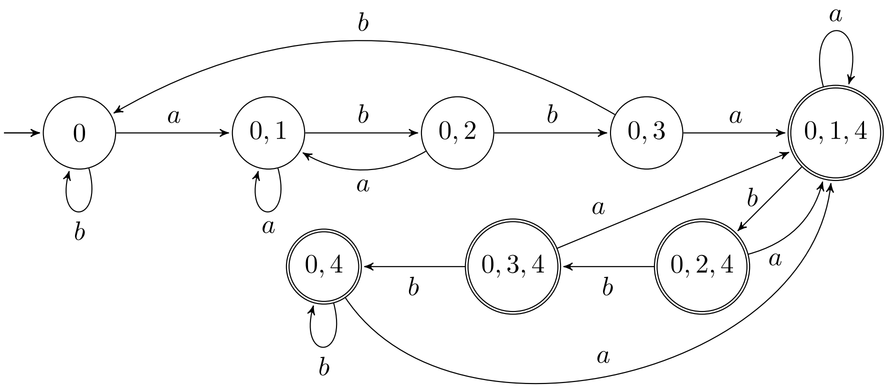


Construire un AFD (complet) équivalent.

Solution

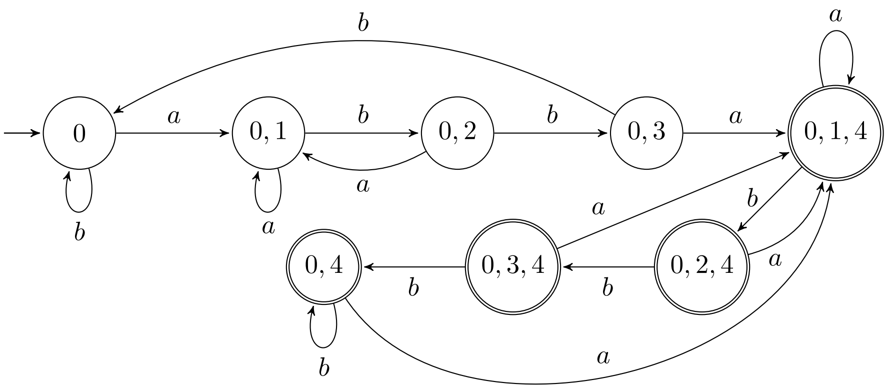


Solution



On voit qu'une fois dans un état acceptant, on ne reste que dans des états acceptants. Du coup, on pourrait fusionner tous les états acceptants.

Solution



On voit qu'une fois dans un état acceptant, on ne reste que dans des états acceptants. Du coup, on pourrait fusionner tous les états acceptants.

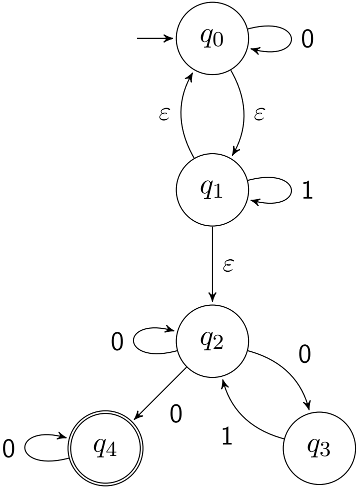
C'est l'objectif de la minimisation d'automate.

Autre illustration de la minimisation

Construire un AFD complet pour $L = (\{0\}^* \{1\}^*)^* \{0, 01\}^* \{0\}^+$.

Autre illustration de la minimisation

Construire un AFD complet pour $L = (\{0\}^* \{1\}^*)^* \{0, 01\}^* \{0\}^+$.



Autre illustration de la minimisation

Construire un AFD complet pour $L = (\{0\}^* \{1\}^*)^* \{0, 01\}^* \{0\}^+$.

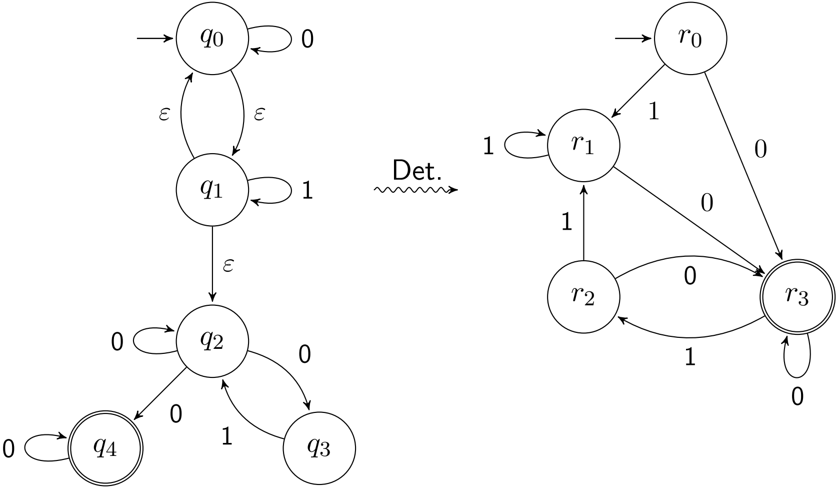


Illustration (suite)

Exercice : On peut montrer que $L = \{0, 1\}^* \{0\}$.

Illustration (suite)

Exercice : On peut montrer que $L = \{0,1\}^* \{0\}$.

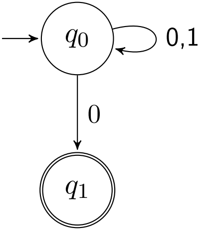


Illustration (suite)

Exercice : On peut montrer que $L = \{0,1\}^* \{0\}$.

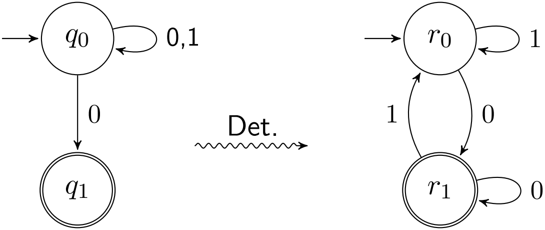
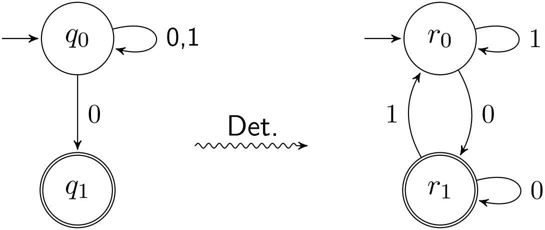


Illustration (suite)

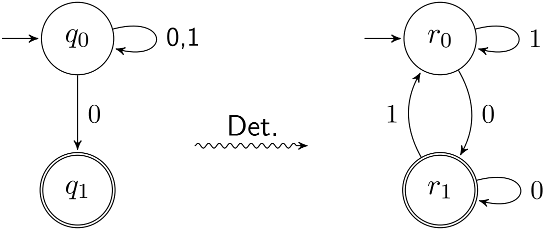
Exercice : On peut montrer que $L = \{0,1\}^* \{0\}$.



Les deux automates construits sont équivalents.

Illustration (suite)

Exercice : On peut montrer que $L = \{0,1\}^* \{0\}$.



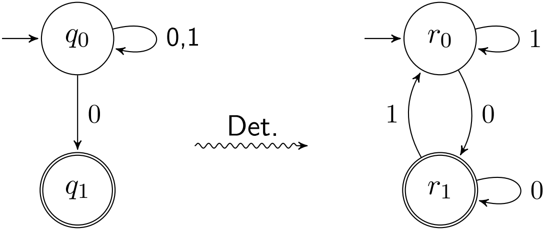
Les deux automates construits sont équivalents.

Définition (Minimalité)

Un AFD complet A est minimal si tout AFD complet équivalent à A a au moins autant d'états que A.
Cet automate minimal est unique au renommage des états près.

Illustration (suite)

Exercice : On peut montrer que $L = \{0,1\}^* \{0\}$.



Les deux automates construits sont équivalents.

Définition (Minimalité)

Un AFD complet A est minimal si tout AFD complet équivalent à A a au moins autant d'états que A.
Cet automate minimal est unique au renommage des états près.

Question : comment construire de façon systématique un AFD minimal ?

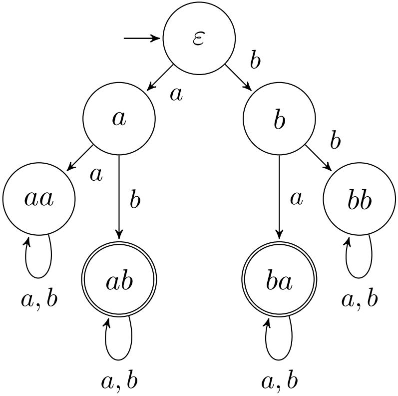
Principe de construction

On peut facilement « fusionner » certains états.

Principe de construction

On peut facilement « fusionner » certains états.

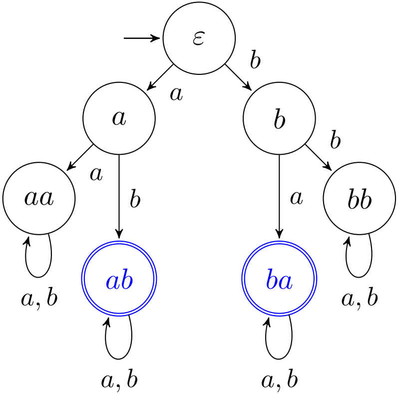
Exemple : $L = \{ab, ba\}\{a, b\}^*$



Principe de construction

On peut facilement « fusionner » certains états.

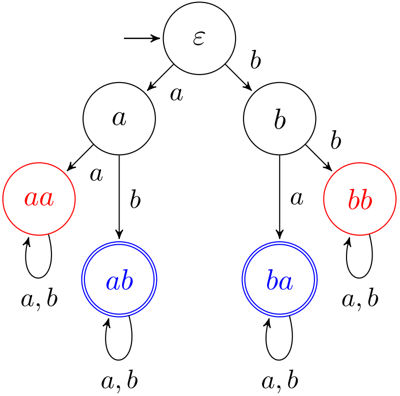
Exemple : $L = \{ab, ba\}\{a, b\}^*$



Principe de construction

On peut facilement « fusionner » certains états.

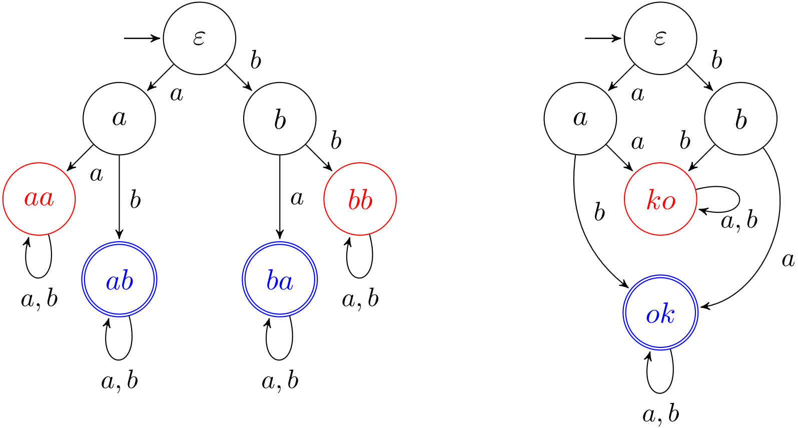
Exemple : $L = \{ab, ba\}\{a, b\}^*$



Principe de construction

On peut facilement « fusionner » certains états.

Exemple : $L = \{ab, ba\}\{a, b\}^*$



Généralisation

Définition (Équivalence de Nerode)

Soit $A = \langle Q, V, \delta, \{q_0\}, F \rangle$ un AFD complet.
Deux états $p, q \in Q$ sont équivalents dans A si et seulement si

$$\forall w \in V^*,\ (\delta^*(p, w) \in F \Leftrightarrow \delta^*(q, w) \in F)$$

Généralisation

Définition (Équivalence de Nerode)

Soit $A = \langle Q, V, \delta, \{q_0\}, F \rangle$ un AFD complet.
Deux états $p, q \in Q$ sont équivalents dans A si et seulement si

$$\forall w \in V^*,\ (\delta^*(p, w) \in F \Leftrightarrow \delta^*(q, w) \in F)$$

On note alors $p \equiv_A q$, ou simplement $p \equiv q$.

Généralisation

Définition (Équivalence de Nerode)

Soit $A = \langle Q, V, \delta, \{q_0\}, F \rangle$ un AFD complet.
Deux états $p, q \in Q$ sont équivalents dans A si et seulement si

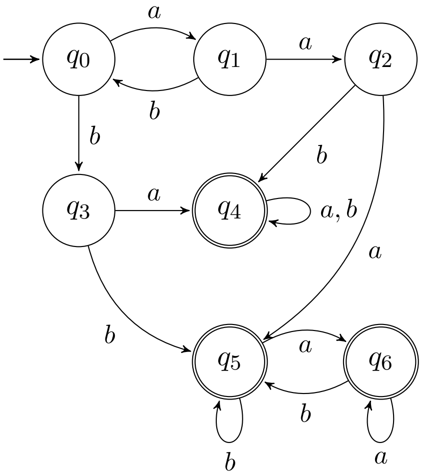
$$\forall w \in V^*,\ (\delta^*(p, w) \in F \Leftrightarrow \delta^*(q, w) \in F)$$

On note alors $p \equiv_A q$, ou simplement $p \equiv q$.

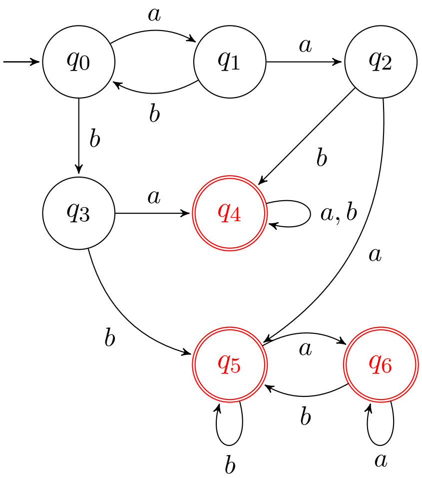
Proposition

Posons $A_p \overset{def}{=} \langle Q, V, \delta, \{p\}, F \rangle$ *et* $A_q \overset{def}{=} \langle Q, V, \delta, \{q\}, F \rangle$.
On a alors : $p \equiv_A q$ *si et seulement si* A_p *et* A_q *sont équivalents.*

Exemple

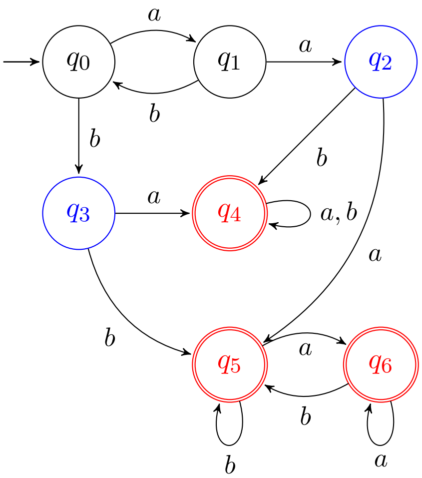


Exemple



$$q_4 \equiv_A q_5 \equiv_A q_6$$

Exemple



$$q_4 \equiv_A q_5 \equiv_A q_6$$
$$q_2 \equiv_A q_3$$

Définition de l'automate minimal

Proposition

1. $\equiv_A$ *est une relation d'équivalence.*
   On note $[p]$ *(ou* $[p]_A$*) la classe d'équivalence de* p.
2. *Si* $p \equiv_A q$*, alors* $\forall w \in V^*$, $\delta^*(p, w) \equiv_A \delta^*(q, w)$.

Définition de l'automate minimal

Proposition

1. $\equiv_A$ *est une relation d'équivalence.*
   On note $[p]$ *(ou* $[p]_A$*) la classe d'équivalence de* p.

2. *Si* $p \equiv_A q$*, alors* $\forall w \in V^*$*,* $\delta^*(p, w) \equiv_A \delta^*(q, w)$.
   Si $[p]_A = [q]_A$ *alors* $\forall w \in V^*$*,* $[\delta^*(p, w)]_A = [\delta^*(q, w)]_A$.

Définition de l'automate minimal

Proposition

1. *$\equiv_A$ est une relation d'équivalence.*
   On note $[p]$ (ou $[p]_A$) la classe d'équivalence de p.
2. *Si $p \equiv_A q$, alors $\forall w \in V^*$, $\delta^*(p, w) \equiv_A \delta^*(q, w)$.*
   Si $[p]_A = [q]_A$ alors $\forall w \in V^*$, $[\delta^*(p, w)]_A = [\delta^*(q, w)]_A$.

Preuve : exercice.

Définition de l'automate minimal

Proposition

1. *$\equiv_A$ est une relation d'équivalence.*
   On note $[p]$ (ou $[p]_A$) la classe d'équivalence de p.
2. *Si $p \equiv_A q$, alors $\forall w \in V^*$, $\delta^*(p, w) \equiv_A \delta^*(q, w)$.*
   Si $[p]_A = [q]_A$ alors $\forall w \in V^*$, $[\delta^*(p, w)]_A = [\delta^*(q, w)]_A$.

Preuve : exercice.

Définition

Soit $A = \langle Q, V, \delta, \{q_0\}, F\rangle$ un AFD complet et initialement connecté.
On définit $\mu(A) = \langle Q_\mu, V, \delta_\mu, \{[q_0]\}, F_\mu\rangle$, où :

- Q_μ est l'ensemble des classes d'équivalence des états de Q ;

Définition de l'automate minimal

Proposition

1. *$\equiv_A$ est une relation d'équivalence.*
   On note $[p]$ (ou $[p]_A$) la classe d'équivalence de p.
2. *Si $p \equiv_A q$, alors $\forall w \in V^*$, $\delta^*(p, w) \equiv_A \delta^*(q, w)$.*
   Si $[p]_A = [q]_A$ alors $\forall w \in V^*$, $[\delta^*(p, w)]_A = [\delta^*(q, w)]_A$.

Preuve : exercice.

Définition

Soit $A = \langle Q, V, \delta, \{q_0\}, F\rangle$ un AFD complet et initialement connecté.
On définit $\mu(A) = \langle Q_\mu, V, \delta_\mu, \{[q_0]\}, F_\mu\rangle$, où :

- Q_μ est l'ensemble des classes d'équivalence des états de Q ;
- F_μ est l'ensemble des classes d'équivalence des états de F ;

Définition de l'automate minimal

Proposition

1. *$\equiv_A$ est une relation d'équivalence.*
   On note $[p]$ (ou $[p]_A$) la classe d'équivalence de p.
2. *Si $p \equiv_A q$, alors $\forall w \in V^*$, $\delta^*(p, w) \equiv_A \delta^*(q, w)$.*
   Si $[p]_A = [q]_A$ alors $\forall w \in V^*$, $[\delta^*(p, w)]_A = [\delta^*(q, w)]_A$.

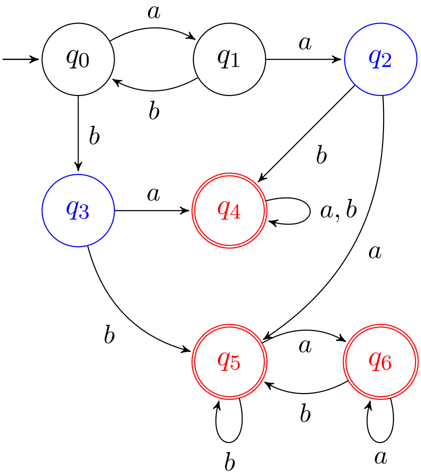
Preuve : exercice.

Définition

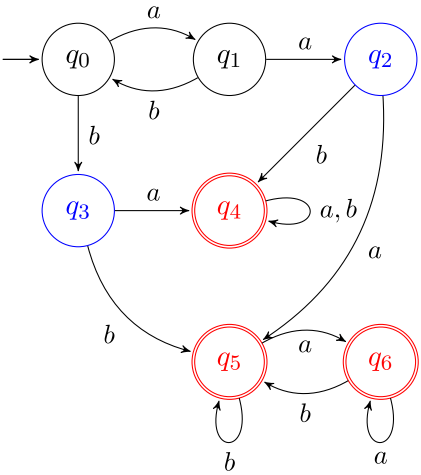
Soit $A = \langle Q, V, \delta, \{q_0\}, F\rangle$ un AFD complet et initialement connecté.
On définit $\mu(A) = \langle Q_\mu, V, \delta_\mu, \{[q_0]\}, F_\mu\rangle$, où :

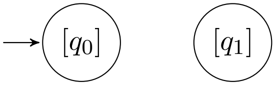
- Q_μ est l'ensemble des classes d'équivalence des états de Q ;
- F_μ est l'ensemble des classes d'équivalence des états de F ;
- $\forall [p] \in Q_\mu$, $\forall a \in V$, $\delta_\mu([p], a) = [\delta(p, a)]$.

Exemple

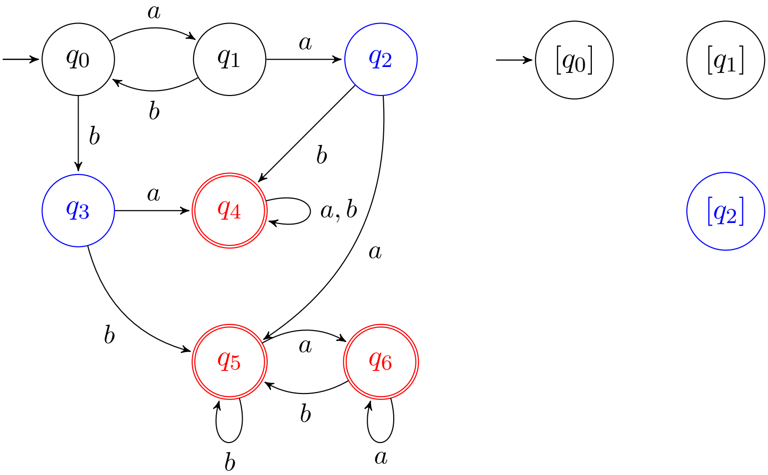


Exemple

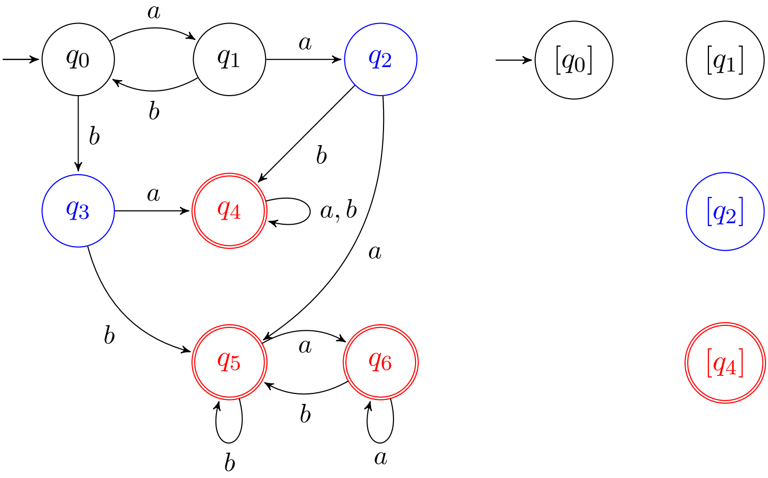




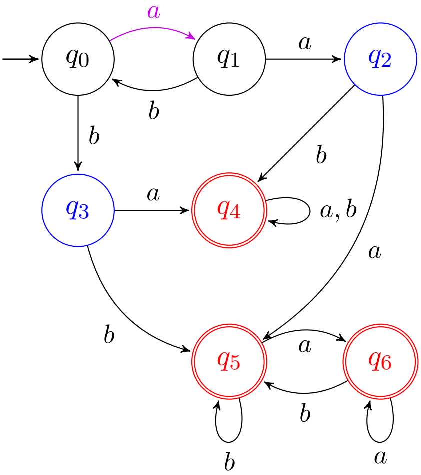
Exemple

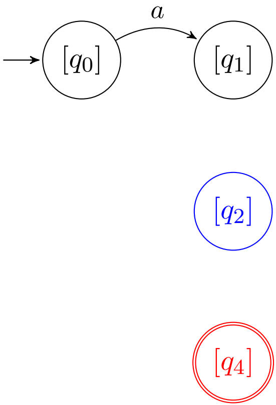


Exemple

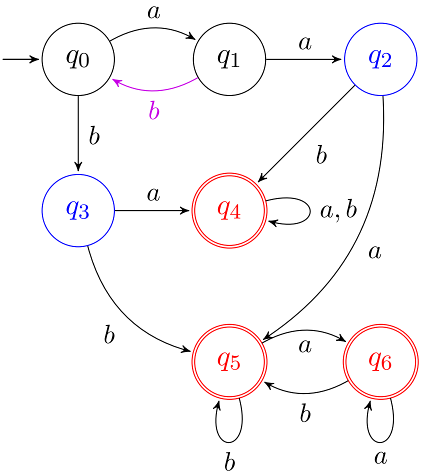


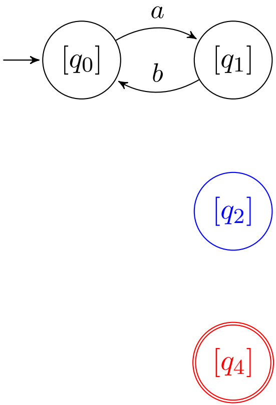
Exemple



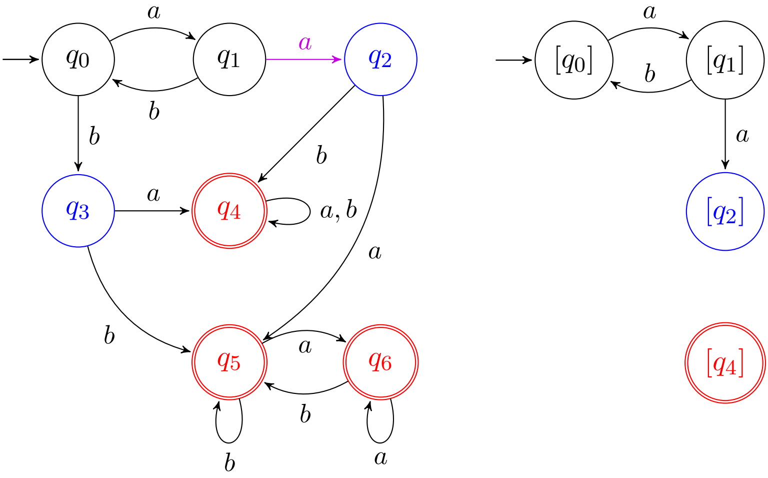


Exemple

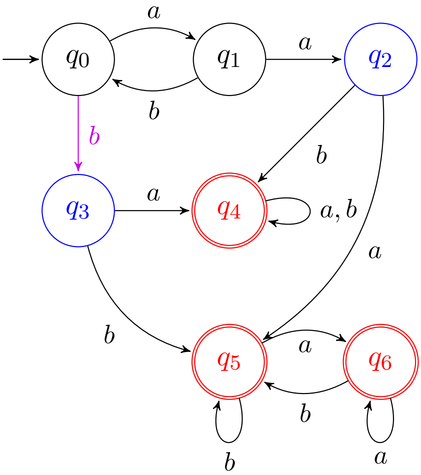


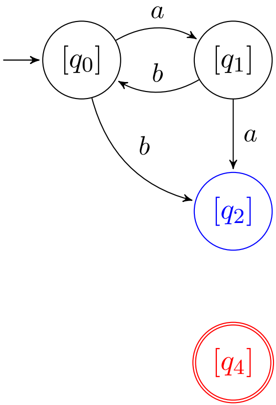


Exemple

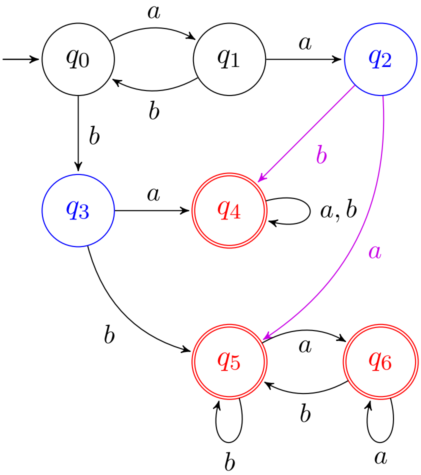


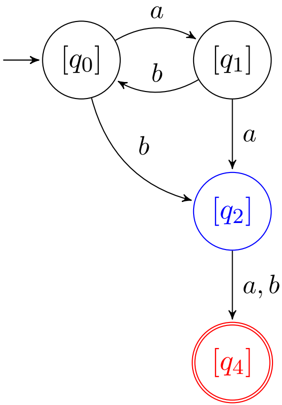
Exemple



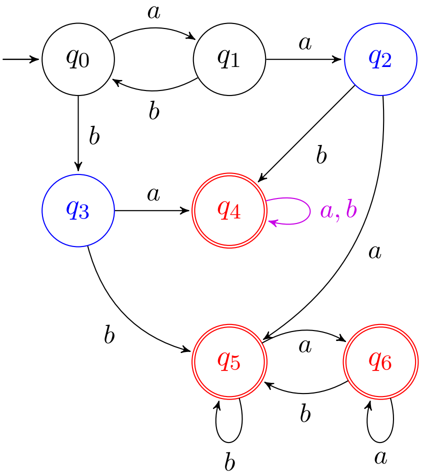


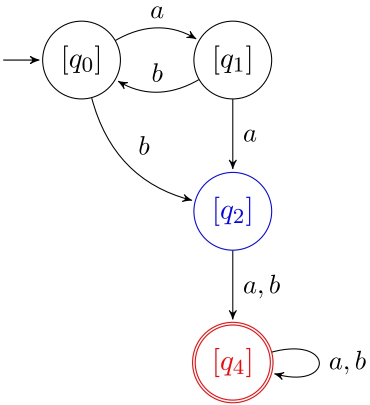
Exemple





Exemple





Construction d'un automate minimal

Soit un AFD complet $A = \langle Q, V, \delta, \{q_0\}, F \rangle$ qu'on souhaite minimiser.

1. Supprimer les états inaccessibles de A

Construction d'un automate minimal

Soit un AFD complet $A = \langle Q, V, \delta, \{q_0\}, F\rangle$ qu'on souhaite minimiser.

1. Supprimer les états inaccessibles de A
2. Déterminer efficacement la relation $\equiv$

Construction d'un automate minimal

Soit un AFD complet $A = \langle Q, V, \delta, \{q_0\}, F \rangle$ qu'on souhaite minimiser.

1. Supprimer les états inaccessibles de A
2. Déterminer efficacement la relation $\equiv$
3. Construire l'automate minimal : $\langle Q_\mu, V, \delta_\mu, \{[q_0]\}, F_\mu \rangle$

Construction d'un automate minimal

Soit un AFD complet $A = \langle Q, V, \delta, \{q_0\}, F\rangle$ qu'on souhaite minimiser.

1. Supprimer les états inaccessibles de A
2. Déterminer efficacement la relation $\equiv$
3. Construire l'automate minimal : $\langle Q_\mu, V, \delta_\mu, \{[q_0]\}, F_\mu\rangle$

Construction d'un automate minimal

Soit un AFD complet $A = \langle Q, V, \delta, \{q_0\}, F\rangle$ qu'on souhaite minimiser.

1. Supprimer les états inaccessibles de A
2. Déterminer efficacement la relation $\equiv$
   Par approximations successives (cf. $\mathrm{Acc}_\varepsilon(p)$)
3. Construire l'automate minimal : $\langle Q_\mu, V, \delta_\mu, \{[q_0]\}, F_\mu\rangle$

Construction d'un automate minimal

Soit un AFD complet $A = \langle Q, V, \delta, \{q_0\}, F\rangle$ qu'on souhaite minimiser.

1. Supprimer les états inaccessibles de A
2. Déterminer efficacement la relation $\equiv$
   Par approximations successives (cf. $\mathrm{Acc}_\varepsilon(p)$)
3. Construire l'automate minimal : $\langle Q_\mu, V, \delta_\mu, \{[q_0]\}, F_\mu\rangle$

Définition

Pour $k \geq 0$, on définit la relation $\equiv_k$ sur Q par : $p \equiv_k q$ si et seulement si

p et q sont équivalents pour tous les mots de longueur au plus k.

Construction d'un automate minimal

Soit un AFD complet $A = \langle Q, V, \delta, \{q_0\}, F \rangle$ qu'on souhaite minimiser.

1. Supprimer les états inaccessibles de A
2. Déterminer efficacement la relation $\equiv$
   Par approximations successives (cf. $\mathrm{Acc}_\varepsilon(p)$)
3. Construire l'automate minimal : $\langle Q_\mu, V, \delta_\mu, \{[q_0]\}, F_\mu \rangle$

Définition

Pour $k \geq 0$, on définit la relation $\equiv_k$ sur Q par : $p \equiv_k q$ si et seulement si

p et q sont équivalents pour tous les mots de longueur au plus k.

Formellement :

$$\forall w \in V^*, \text{ si } |w| \leq k, \text{ alors } (\delta^*(p, w) \in F \Leftrightarrow \delta^*(q, w) \in F)$$

Construction d'un automate minimal

Soit un AFD complet $A = \langle Q, V, \delta, \{q_0\}, F \rangle$ qu'on souhaite minimiser.

1. Supprimer les états inaccessibles de A
2. Déterminer efficacement la relation $\equiv$
   Par approximations successives (cf. $\mathrm{Acc}_\varepsilon(p)$)
3. Construire l'automate minimal : $\langle Q_\mu, V, \delta_\mu, \{[q_0]\}, F_\mu \rangle$

Définition

Pour $k \geq 0$, on définit la relation $\equiv_k$ sur Q par : $p \equiv_k q$ si et seulement si

p et q sont équivalents pour tous les mots de longueur au plus k.

Formellement :

$$\forall w \in V^*, \text{ si } |w| \leq k, \text{ alors } (\delta^*(p, w) \in F \Leftrightarrow \delta^*(q, w) \in F)$$

Si $p \equiv_k q$, alors les automates A_p et A_q reconnaissent exactement les mêmes mots de longueur au plus k.

Calcul de $\equiv$

Proposition

On a les propriétés suivantes :

$$\equiv_{k+1} \quad \subseteq \quad \equiv_k$$

Calcul de $\equiv$

Proposition

On a les propriétés suivantes :

$$\equiv_{k+1} \quad \subseteq \quad \equiv_k \qquad\qquad \equiv \quad = \quad \bigcap_{k \geq 0} \equiv_k$$

Calcul de $\equiv$

Proposition

On a les propriétés suivantes :

$$\equiv_{k+1} \quad \subseteq \quad \equiv_k \qquad\qquad\qquad \equiv \quad = \quad \bigcap_{k \geq 0} \equiv_k$$

Proposition (Stabilisation de la suite $\equiv_k$)

Si A est un AFD *à n états, alors*
il existe $k \leq n$ tel que les relations $\equiv_k$, $\equiv_{k+1}$ et $\equiv$ sont identiques.

Donc, si on sait calculer les relations $\equiv_k$ efficacement,
on saura en déduire la relation $\equiv$.

Calcul de $\equiv$ (suite)

Proposition

On a les propriétés suivantes :

1. $p \equiv_0 q$ *si et seulement si* $p \in F \Leftrightarrow q \in F$
2. $\forall k \geq 0$, $p \equiv_{k+1} q$ *si et seulement si*

$$p \equiv_k q \text{ et } \forall a \in V,\ \delta(p,a) \equiv_k \delta(q,a)$$

Preuve : exercice

Calcul de $\equiv$ (suite)

Proposition

On a les propriétés suivantes :

1. $p \equiv_0 q$ *si et seulement si* $p \in F \Leftrightarrow q \in F$
2. $\forall k \geq 0$, $p \equiv_{k+1} q$ *si et seulement si*

$$p \equiv_k q \text{ et } \forall a \in V,\ \delta(p,a) \equiv_k \delta(q,a)$$

Preuve : exercice

Conséquences

- $\equiv_0$ contient deux classes : F et $Q \setminus F$
-
-

Calcul de $\equiv$ (suite)

Proposition

On a les propriétés suivantes :

1. $p \equiv_0 q$ *si et seulement si* $p \in F \Leftrightarrow q \in F$
2. $\forall k \geq 0$, $p \equiv_{k+1} q$ *si et seulement si*

$$p \equiv_k q \text{ et } \forall a \in V,\ \delta(p,a) \equiv_k \delta(q,a)$$

Preuve : exercice

Conséquences

- $\equiv_0$ contient deux classes : F et $Q \setminus F$
- Si $p \equiv_k q$ et $\exists a \in V$ tel que $\delta(p,a) \not\equiv_k \delta(q,a)$, alors $p \not\equiv_{k+1} q$
-

Calcul de $\equiv$ (suite)

Proposition

On a les propriétés suivantes :

1. $p \equiv_0 q$ *si et seulement si* $p \in F \Leftrightarrow q \in F$
2. $\forall k \geq 0$, $p \equiv_{k+1} q$ *si et seulement si*

$$p \equiv_k q \text{ et } \forall a \in V,\ \delta(p,a) \equiv_k \delta(q,a)$$

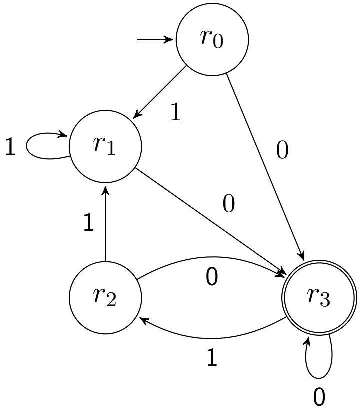
Preuve : exercice

Conséquences

- $\equiv_0$ contient deux classes : F et $Q \setminus F$
- Si $p \equiv_k q$ et $\exists a \in V$ tel que $\delta(p,a) \not\equiv_k \delta(q,a)$, alors $p \not\equiv_{k+1} q$
- Le calcul des $\equiv_k$ s'apparente au calcul des A_n pour $\mathrm{Acc}_\varepsilon(p)$ mais à l'envers ! (on fait réduire des classes et non grossir des ensembles)

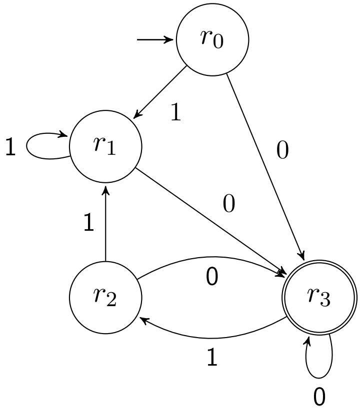
Exemple

Automate de la diapo 4



Exemple

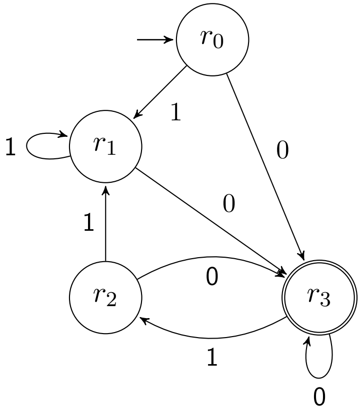
Automate de la diapo 4



$$\equiv_0 \quad : \quad \{r_0, r_1, r_2\}\,,\ \{r_3\}$$

Exemple

Automate de la diapo 4

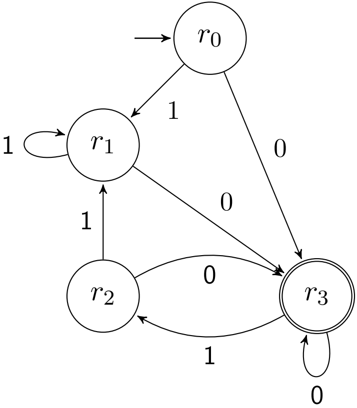


$$\equiv_0 \quad : \quad \{{\color{red}r_0}, {\color{red}r_1}, r_2\}\ , \ \{r_3\}$$

$$\equiv_1 \quad : \quad \qquad\qquad\qquad , \ \{r_3\}$$

Exemple

Automate de la diapo 4

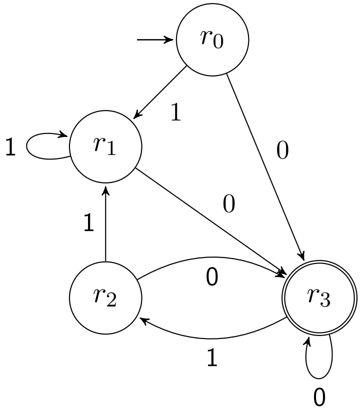


$$\equiv_0 \quad : \quad \{\color{red}{r_0}, \color{red}{r_1}, r_2\}\ ,\ \{r_3\}$$

$$\equiv_1 \quad : \quad \{r_0, r_1\} \qquad ,\ \{r_3\}$$

Exemple

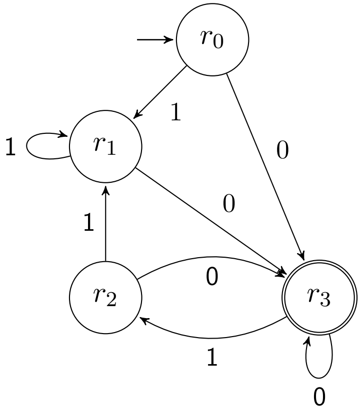
Automate de la diapo 4



$$\equiv_0 \quad : \quad \{{\color{red}r_0}, r_1, {\color{red}r_2}\}\,,\ \{r_3\}$$
$$\equiv_1 \quad : \quad \{r_0, r_1\} \qquad ,\ \{r_3\}$$

Exemple

Automate de la diapo 4

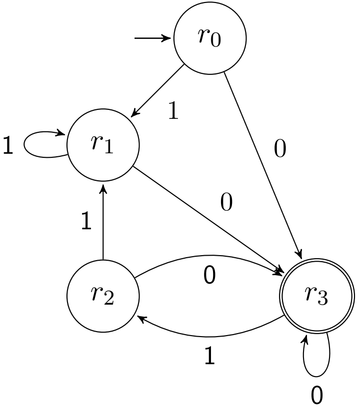


$$\equiv_0 \quad : \quad \{{\color{red}r_0}, r_1, {\color{red}r_2}\}, \ \{r_3\}$$

$$\equiv_1 \quad : \quad \{r_0, r_1, r_2\}, \ \{r_3\}$$

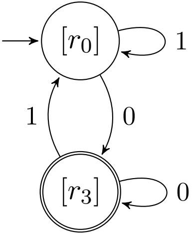
Exemple

Automate de la diapo 4

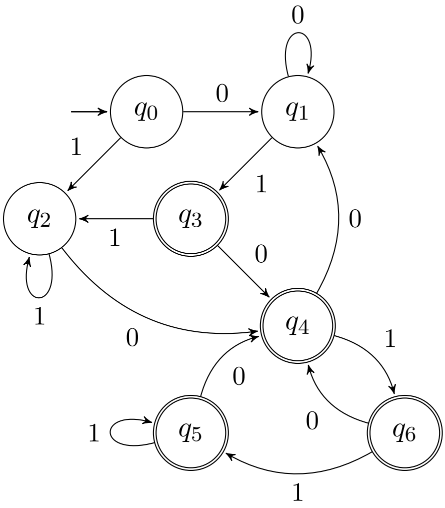


$$\equiv_0 \quad : \quad \{r_0, r_1, r_2\}\,,\ \{r_3\}$$

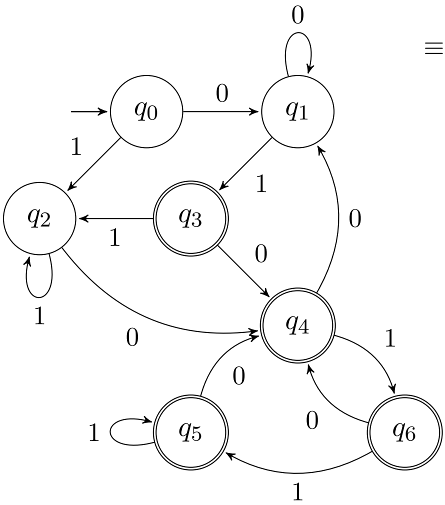
$$\equiv_1 \quad : \quad \{r_0, r_1, r_2\},\ \{r_3\}$$



Exemple 2

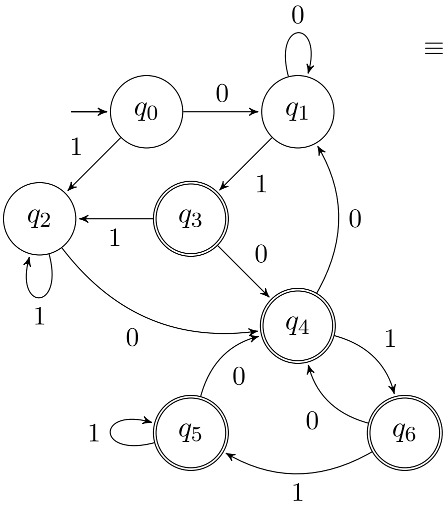


Exemple 2



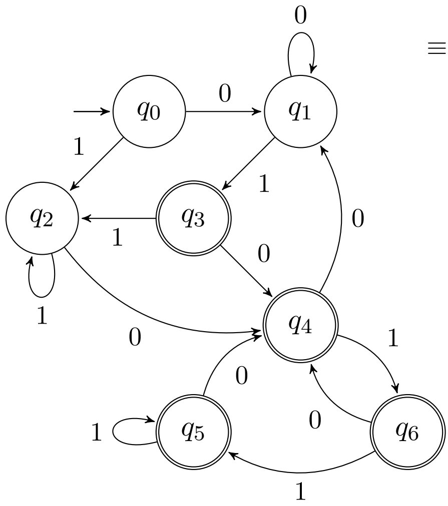
$\equiv_0 : \{q_0, \quad q_1, \quad q_2\} \quad \{q_3, \quad q_4, \quad q_5, \quad q_6\}$

Exemple 2



$$\begin{array}{lllll} & \color{red}{A} & & \color{blue}{B} & \\ \equiv_0 : & \{q_0, \; q_1, \; q_2\} & & \{q_3, \; q_4, \; q_5, \; q_6\} & \end{array}$$

Exemple 2

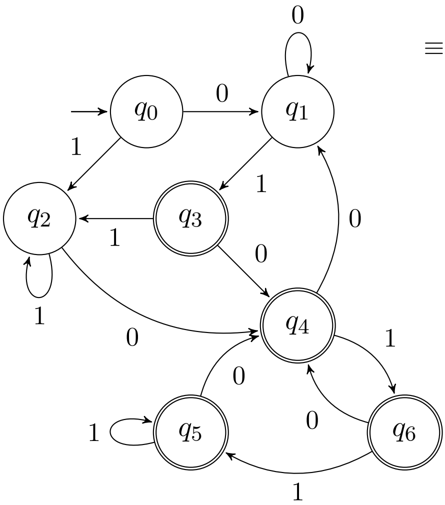


$A \qquad\qquad B$

$\equiv_0 : \{q_0,\ q_1,\ q_2\} \quad \{q_3,\ q_4,\ q_5,\ q_6\}$

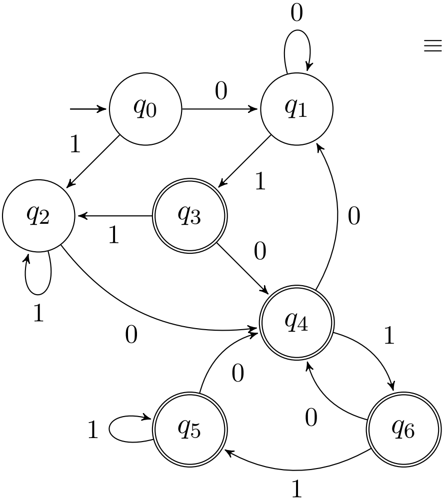
A

Exemple 2



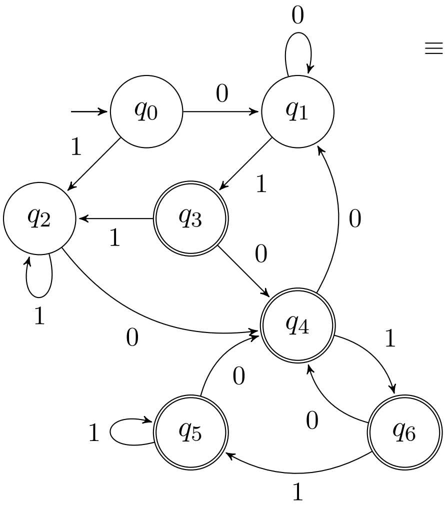
$$\begin{array}{lccc}
 & \color{red}{A} & & \color{blue}{B} \\
\equiv_0 : & \{q_0, \quad q_1, \quad q_2\} & & \{q_3, \quad q_4, \quad q_5, \quad q_6\} \\
 & \color{red}{AA} & &
\end{array}$$

Exemple 2



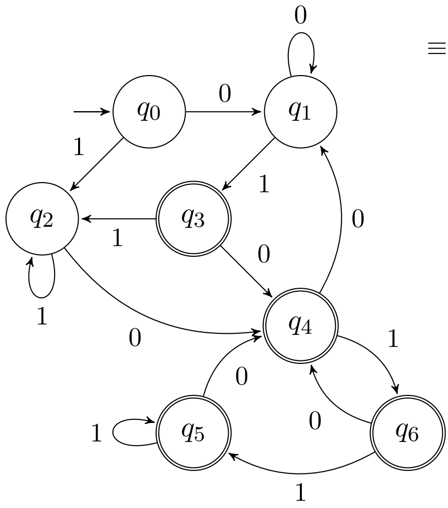
$$\equiv_0 : \overset{A}{\{\underset{AA}{q_0},\ \underset{A}{q_1},\ q_2\}} \quad \overset{B}{\{q_3,\ q_4,\ q_5,\ q_6\}}$$

Exemple 2



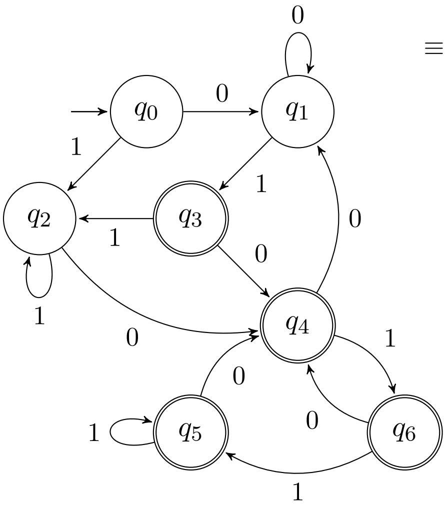
$$\equiv_0 : \overset{A}{\{\underset{AA}{q_0}, \quad \underset{AB}{q_1}, \quad q_2\}} \qquad \overset{B}{\{q_3, \quad q_4, \quad q_5, \quad q_6\}}$$

Exemple 2



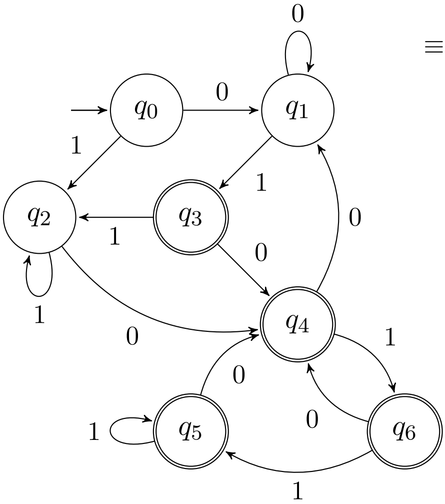
$$\begin{array}{lccccccc} & & A & & & B & & \\ \equiv_0 : & \{q_0, & q_1, & q_2\} & \{q_3, & q_4, & q_5, & q_6\} \\ & AA & AB & B & & & & \end{array}$$

Exemple 2



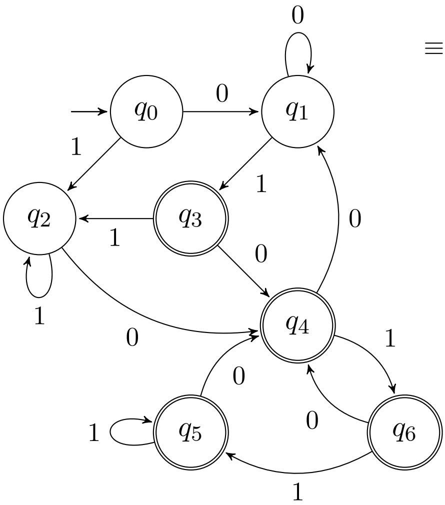
$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & & \color{red}{A} & & & & & \color{blue}{B} & & \\
\equiv_0 : & \{q_0, & q_1, & q_2\} & & \{q_3, & q_4, & q_5, & q_6\} \\
 & \color{red}{AA} & \color{red}{A}\color{blue}{B} & \color{blue}{B}\color{red}{A} & & & & & &
\end{array}
$$

Exemple 2



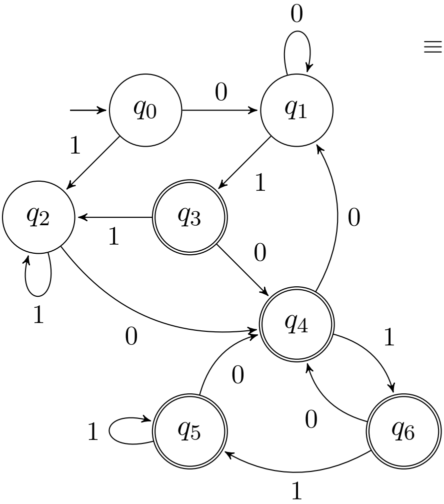
$$\begin{array}{ccccccccc} & & \color{red}{A} & & & & \color{blue}{B} & & \\ \equiv_0 : & \{q_0, & q_1, & q_2\} & & \{q_3, & q_4, & q_5, & q_6\} \\ & \color{red}{AA} & \color{red}{A}\color{blue}{B} & \color{blue}{B}\color{red}{A} & & \color{blue}{B}\color{red}{A} & & & \end{array}$$

Exemple 2



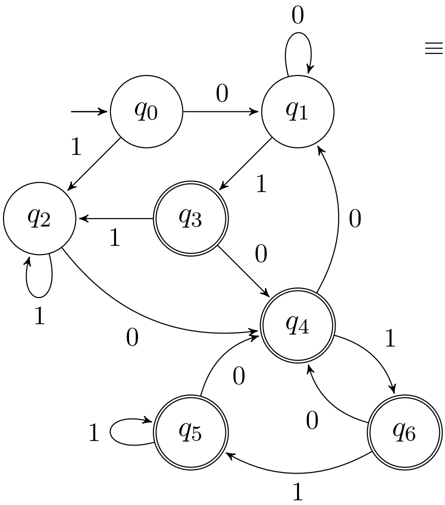
$$\begin{array}{lccccccc} & & {\color{red}A} & & & {\color{blue}B} & & \\ \equiv_0 : & \{q_0, & q_1, & q_2\} & \{q_3, & q_4, & q_5, & q_6\} \\ & {\color{red}AA} & {\color{red}A}{\color{blue}B} & {\color{blue}B}{\color{red}A} & {\color{blue}B}{\color{red}A} & {\color{red}A}{\color{blue}B} & & \end{array}$$

Exemple 2



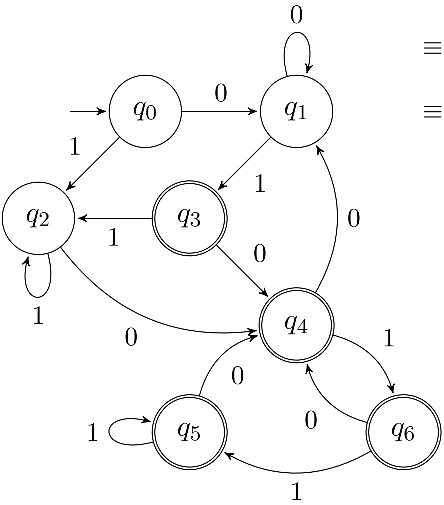
$$
\begin{array}{lllllllll}
 & & A & & & & B & & \\
\equiv_0 : & \{q_0, & q_1, & q_2\} & & \{q_3, & q_4, & q_5, & q_6\} \\
 & AA & AB & BA & & BA & AB & BB &
\end{array}
$$

Exemple 2



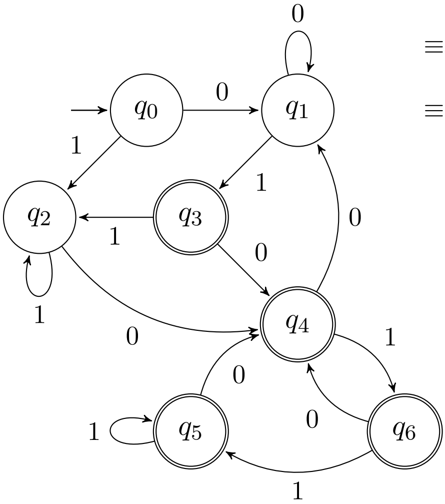
$$\begin{array}{lcccccccc} & & \color{red}{A} & & & & \color{blue}{B} & & \\ \equiv_0 : & \{q_0, & q_1, & q_2\} & & \{q_3, & q_4, & q_5, & q_6\} \\ & \color{red}{AA} & \color{red}{A}\color{blue}{B} & \color{blue}{B}\color{red}{A} & & \color{blue}{B}\color{red}{A} & \color{red}{A}\color{blue}{B} & \color{blue}{BB} & \color{blue}{BB} \end{array}$$

Exemple 2



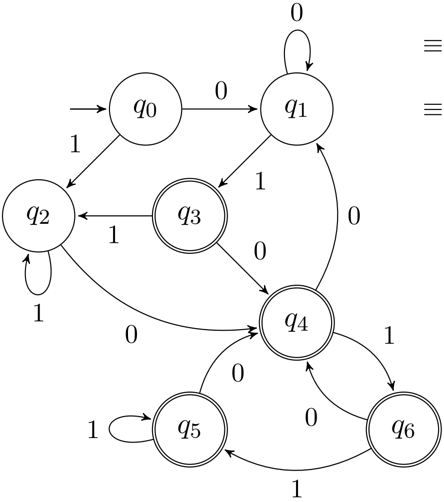
		A			B		
$\equiv_0$:	$\{q_0,$	$q_1,$	$q_2\}$	$\{q_3,$	$q_4,$	$q_5,$	$q_6\}$
	AA	AB	BA	BA	AB	BB	BB
$\equiv_1$:	$\{q_0\}$	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$				

Exemple 2



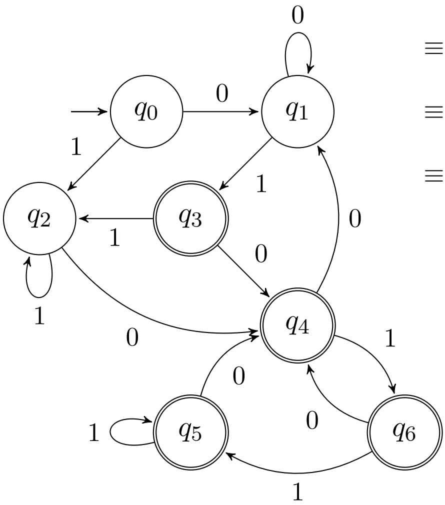
	A			B			
$\equiv_0$:	$\{q_0,$	$q_1,$	$q_2\}$	$\{q_3,$	$q_4,$	$q_5,$	$q_6\}$
	AA	AB	BA	BA	AB	BB	BB
$\equiv_1$:	$\{q_0\}$	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$	$\{q_3\}$	$\{q_4\}$	$\{q_5,$	$q_6\}$

Exemple 2



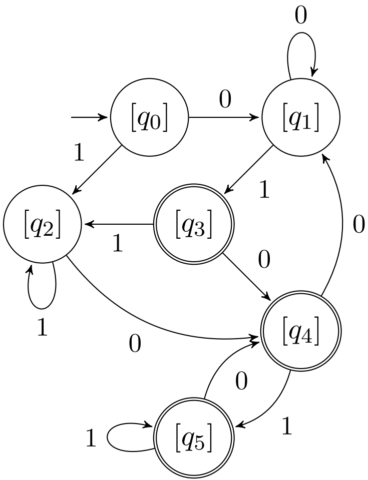
$$
\begin{array}{lccccccc}
 & & A & & & B & & \\
\equiv_0 : & \{q_0, & q_1, & q_2\} & \{q_3, & q_4, & q_5, & q_6\} \\
 & AA & AB & BA & BA & AB & BB & BB \\
\equiv_1 : & \{q_0\} & \{q_1\} & \{q_2\} & \{q_3\} & \{q_4\} & \{q_5, & q_6\} \\
 & & & & & & 45 & 45
\end{array}
$$

Exemple 2



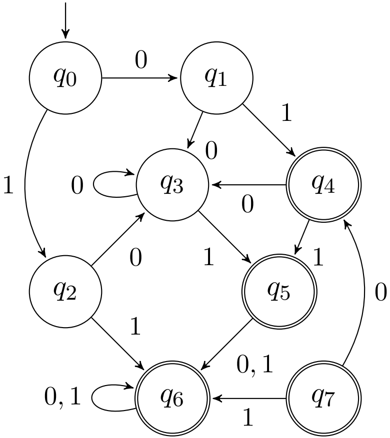
		A			B		
$\equiv_0$:	$\{q_0,$	$q_1,$	$q_2\}$	$\{q_3,$	$q_4,$	$q_5,$	$q_6\}$
	AA	AB	BA	BA	AB	BB	BB
$\equiv_1$:	$\{q_0\}$	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$	$\{q_3\}$	$\{q_4\}$	$\{q_5,$	$q_6\}$
						45	45
$\equiv_2$:	$\{q_0\}$	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$	$\{q_3\}$	$\{q_4\}$	$\{q_5,$	$q_6\}$

Exemple 2 (solution)



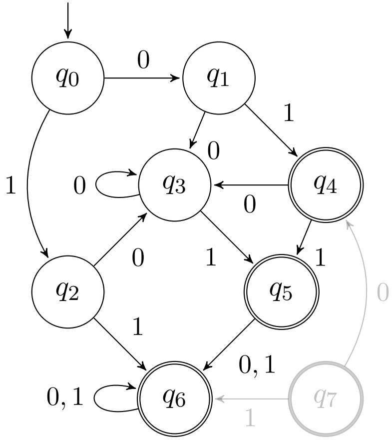
Exercice

Minimiser l'automate suivant :



Exercice

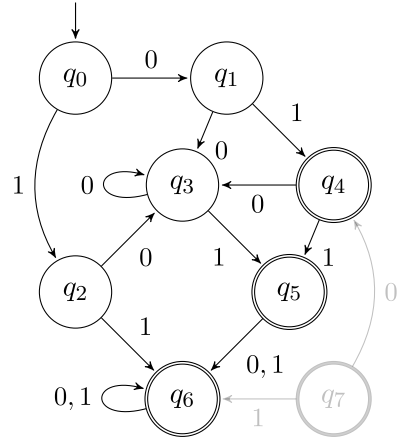
Minimiser l'automate suivant :



Suppression de q_7

Exercice

Minimiser l'automate suivant :

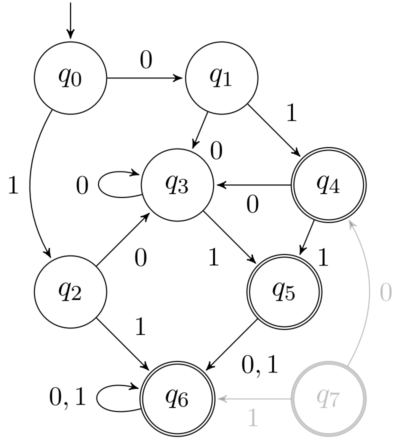


Suppression de q_7

$\equiv_0$: $\{q_0,\ q_1,\ q_2,\ q_3\}\quad\{q_4,\ q_5,\ q_6\}$

Exercice

Minimiser l'automate suivant :

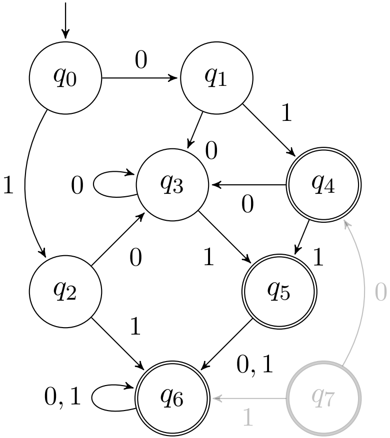


Suppression de q_7

$$\equiv_0 : \underbrace{\{q_0,\ q_1,\ q_2,\ q_3\}}_{A} \quad \underbrace{\{q_4,\ q_5,\ q_6\}}_{B}$$

Exercice

Minimiser l'automate suivant :



Suppression de q_7

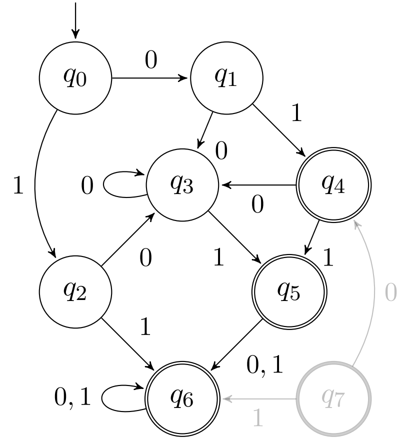
$\equiv_0 : \{q_0, \ q_1, \ q_2, \ q_3\} \quad \{q_4, \ q_5, \ q_6\}$

A $\quad$ B

AA

Exercice

Minimiser l'automate suivant :



Suppression de q_7

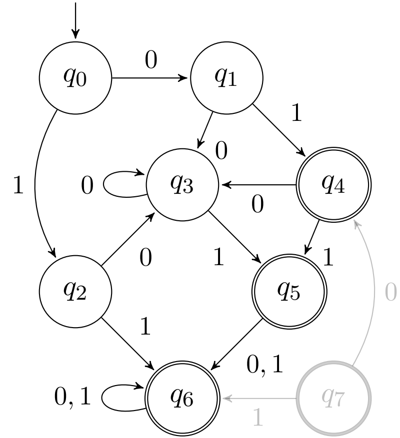
$\equiv_0$: $\{q_0, \; q_1, \; q_2, \; q_3\}$ $\{q_4, \; q_5, \; q_6\}$

A B

AA AB

Exercice

Minimiser l'automate suivant :



Suppression de q_7

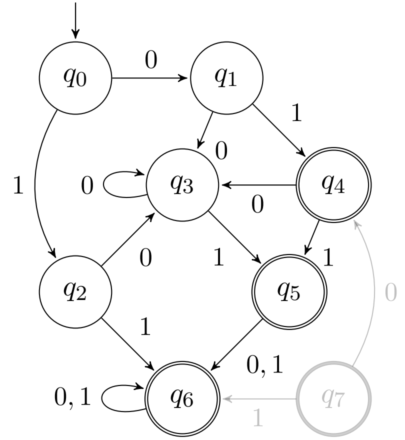
$$\equiv_0 : \{q_0,\ q_1,\ q_2,\ q_3\} \quad \{q_4,\ q_5,\ q_6\}$$

$$A \qquad\qquad B$$

$$AA \quad AB \quad AB$$

Exercice

Minimiser l'automate suivant :



Suppression de q_7

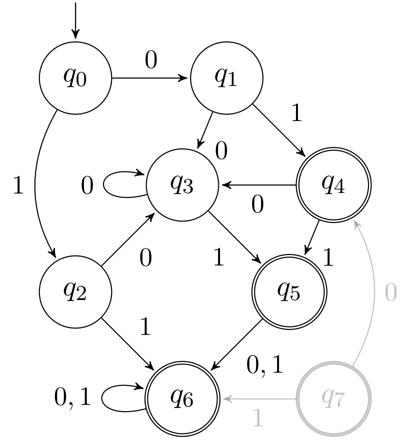
$$\equiv_0 : \{q_0, \; q_1, \; q_2, \; q_3\} \quad \{q_4, \; q_5, \; q_6\}$$

A $\quad$ B

$AA \quad AB \quad AB \quad AB$

Exercice

Minimiser l'automate suivant :



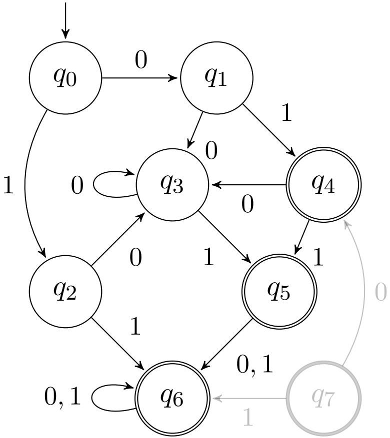
Suppression de q_7

$$\equiv_0 \;:\; \underbrace{\{q_0,\ q_1,\ q_2,\ q_3\}}_{A} \quad \underbrace{\{q_4,\ q_5,\ q_6\}}_{B}$$

$$AA \quad AB \quad AB \quad AB \qquad AB$$

Exercice

Minimiser l'automate suivant :



Suppression de q_7

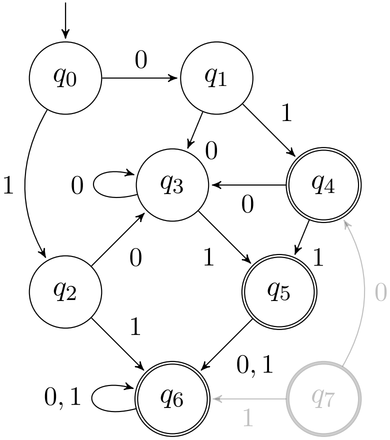
$$\equiv_0 : \{q_0,\ q_1,\ q_2,\ q_3\} \quad \{q_4,\ q_5,\ q_6\}$$

A $\qquad$ B

$AA \quad AB \quad AB \quad AB \qquad AB \quad BB$

Exercice

Minimiser l'automate suivant :



Suppression de q_7

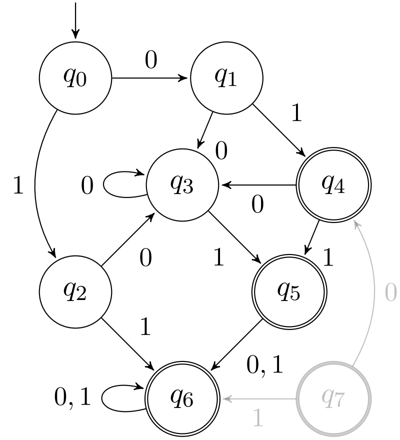
$$\equiv_0 : \{q_0,\ q_1,\ q_2,\ q_3\} \quad \{q_4,\ q_5,\ q_6\}$$

$$\qquad\qquad A \qquad\qquad\qquad\qquad B$$

$$AA \quad AB \quad AB \quad AB \qquad AB \quad BB \quad BB$$

Exercice

Minimiser l'automate suivant :



Suppression de q_7

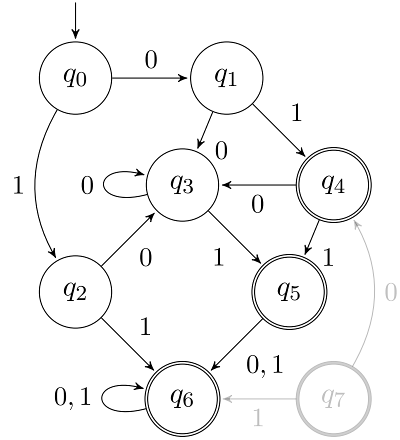
$$\equiv_0 : \{q_0, \; q_1, \; q_2, \; q_3\} \quad \{q_4, \; q_5, \; q_6\}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & A & & & B & & \\ AA & AB & AB & AB & AB & BB & BB \end{array}$$

$$\equiv_1 : \{q_0\} \; \{q_1, \; q_2, \; q_3\} \quad \{q_4\} \; \{q_5, \; q_6\}$$

Exercice

Minimiser l'automate suivant :

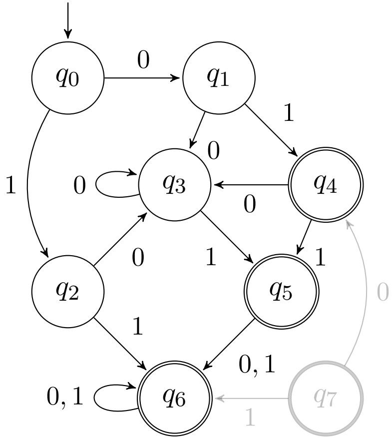


Suppression de q_7

$$
\begin{array}{lcccccccc}
\equiv_0 : & \{q_0, & q_1, & q_2, & q_3\} & \{q_4, & q_5, & q_6\} \\
 & & & A & & & B & \\
 & AA & AB & AB & AB & AB & BB & BB \\
\equiv_1 : & \{q_0\} & \{q_1, & q_2, & q_3\} & \{q_4\} & \{q_5, & q_6\} \\
 & C & & D & & E & G &
\end{array}
$$

Exercice

Minimiser l'automate suivant :

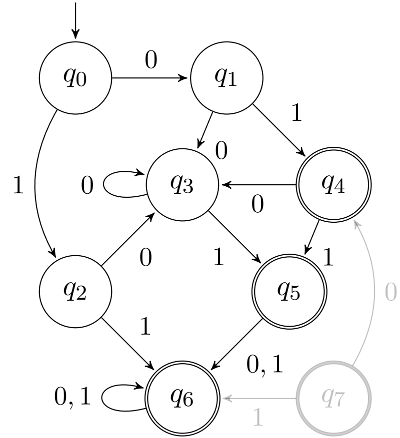


Suppression de q_7

$\equiv_0$:	$\{q_0,$	$q_1,$	$q_2,$	$q_3\}$	$\{q_4,$	$q_5,$	$q_6\}$
			A			B	
	AA	AB	AB	AB	AB	BB	BB
$\equiv_1$:	$\{q_0\}$	$\{q_1,$	$q_2,$	$q_3\}$	$\{q_4\}$	$\{q_5,$	$q_6\}$
	C		D		E	G	
		DE	DG	DG		GG	GG

Exercice

Minimiser l'automate suivant :



Suppression de q_7

$$\equiv_0 : \{q_0,\ q_1,\ q_2,\ q_3\} \quad \{q_4,\ q_5,\ q_6\}$$

$$A \qquad\qquad B$$

$$AA \quad AB \quad AB \quad AB \qquad AB \quad BB \quad BB$$

$$\equiv_1 : \{q_0\}\ \{q_1,\ q_2,\ q_3\} \quad \{q_4\}\ \{q_5,\ q_6\}$$

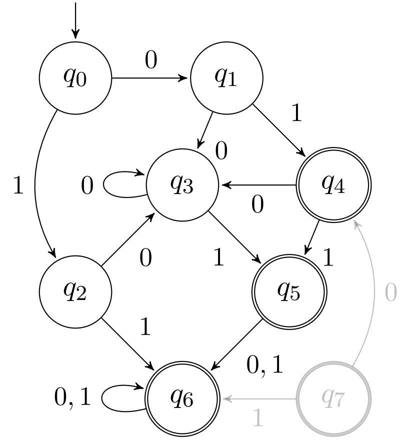
$$C \qquad D \qquad E \qquad G$$

$$DE \quad DG \quad DG \qquad GG \quad GG$$

$$\equiv_2 : \{q_0\}\ \{q_1\}\ \{q_2,\ q_3\} \quad \{q_4\}\ \{q_5,\ q_6\}$$

Exercice

Minimiser l'automate suivant :

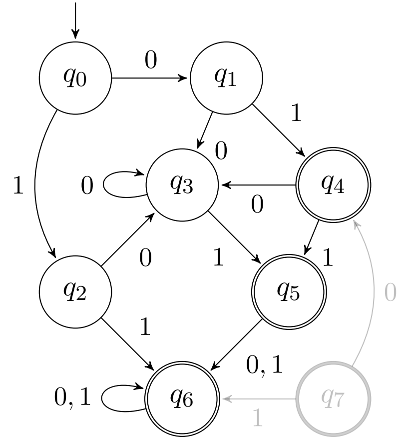


Suppression de q_7

$$\begin{array}{lllll}
\equiv_0 : & \{q_0, \; q_1, \; q_2, \; q_3\} & \{q_4, \; q_5, \; q_6\} \\
 & \quad A & \quad B \\
 & AA \;\; AB \;\; AB \;\; AB & AB \;\; BB \;\; BB \\
\equiv_1 : & \{q_0\} \; \{q_1, \; q_2, \; q_3\} & \{q_4\} \; \{q_5, \; q_6\} \\
 & C \qquad D & E \qquad G \\
 & \quad DE \;\; DG \;\; DG & \quad GG \;\; GG \\
\equiv_2 : & \{q_0\} \; \{q_1\} \; \{q_2, \; q_3\} & \{q_4\} \; \{q_5, \; q_6\} \\
 & C \quad H \quad J & E \qquad G
\end{array}$$

Exercice

Minimiser l'automate suivant :

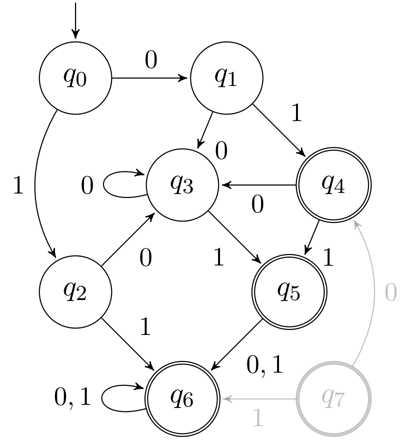


Suppression de q_7

$$\begin{array}{lcccccccc}
\equiv_0 : & \{q_0, & q_1, & q_2, & q_3\} & \{q_4, & q_5, & q_6\} \\
 & & & A & & & B & \\
 & AA & AB & AB & AB & AB & BB & BB \\
\equiv_1 : & \{q_0\} & \{q_1, & q_2, & q_3\} & \{q_4\} & \{q_5, & q_6\} \\
 & C & & D & & E & G & \\
 & & DE & DG & DG & & GG & GG \\
\equiv_2 : & \{q_0\} & \{q_1\} & \{q_2, & q_3\} & \{q_4\} & \{q_5, & q_6\} \\
 & C & H & & J & E & G & \\
 & & & JG & JG & & GG & GG
\end{array}$$

Exercice

Minimiser l'automate suivant :



Suppression de q_7

$$\equiv_0 : \underbrace{\{q_0,\ q_1,\ q_2,\ q_3\}}_{A}\quad \underbrace{\{q_4,\ q_5,\ q_6\}}_{B}$$

$$AA\quad AB\quad AB\quad AB\qquad AB\quad BB\quad BB$$

$$\equiv_1 : \underbrace{\{q_0\}}_{C}\ \underbrace{\{q_1,\ q_2,\ q_3\}}_{D}\quad \underbrace{\{q_4\}}_{E}\ \underbrace{\{q_5,\ q_6\}}_{G}$$

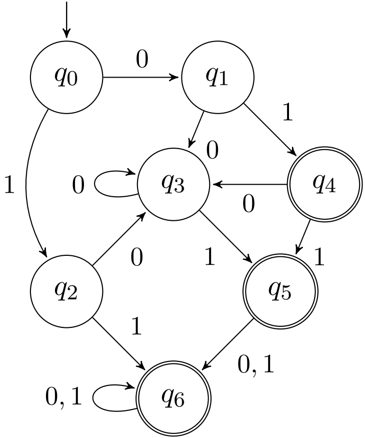
$$DE\quad DG\quad DG\qquad GG\quad GG$$

$$\equiv_2 : \underbrace{\{q_0\}}_{C}\ \underbrace{\{q_1\}}_{H}\ \underbrace{\{q_2,\ q_3\}}_{J}\quad \underbrace{\{q_4\}}_{E}\ \underbrace{\{q_5,\ q_6\}}_{G}$$

$$JG\quad JG\qquad GG\quad GG$$

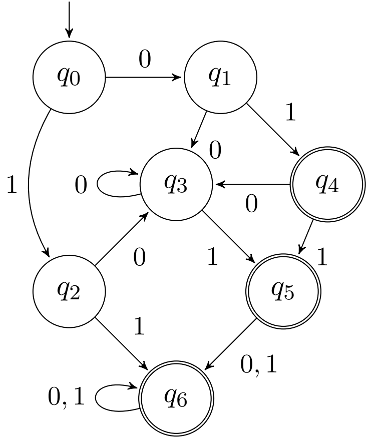
$$\equiv_3 : \{q_0\}\ \{q_1\}\ \{q_2,\ q_3\}\quad \{q_4\}\ \{q_5,\ q_6\}$$

Exercice (suite)

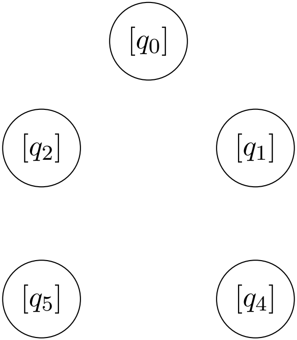


$\equiv : \{q_0\}\ \{q_1\}\ \{q_2, q_3\}\quad \{q_4\}\ \{q_5, q_6\}$

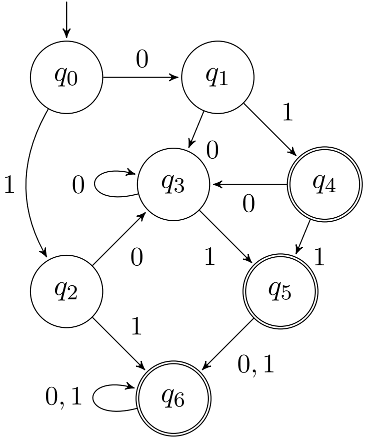
Exercice (suite)



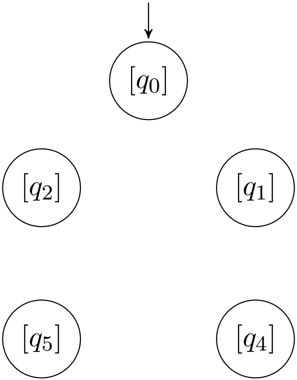
$\equiv : \{q_0\}\ \{q_1\}\ \{q_2, q_3\}\quad \{q_4\}\ \{q_5, q_6\}$



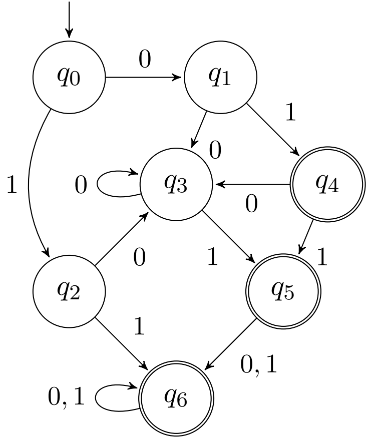
Exercice (suite)



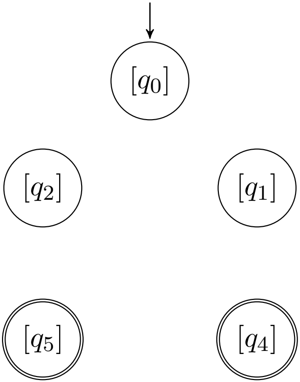
$\equiv$: $\{q_0\}$ $\{q_1\}$ $\{q_2, q_3\}$ $\{q_4\}$ $\{q_5, q_6\}$



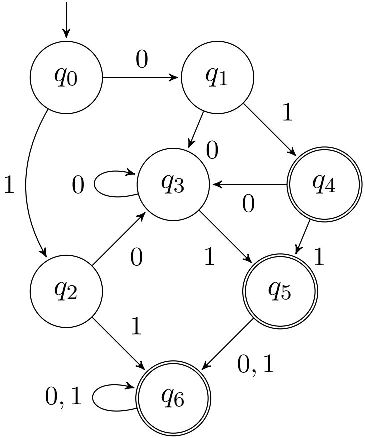
Exercice (suite)



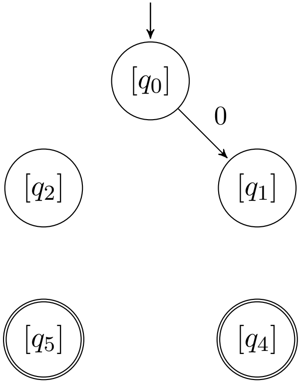
$\equiv$: $\{q_0\}$ $\{q_1\}$ $\{q_2, q_3\}$ $\{q_4\}$ $\{q_5, q_6\}$



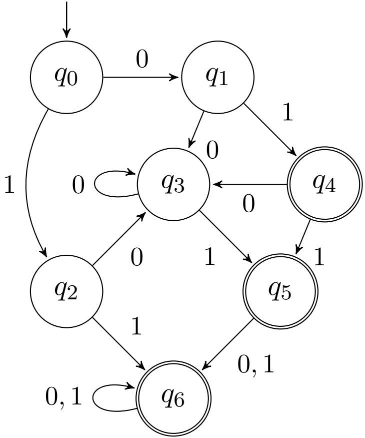
Exercice (suite)



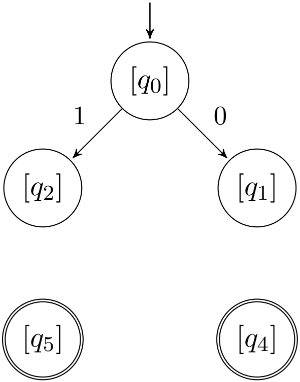
$\equiv : \{q_0\}\ \{q_1\}\ \{q_2, q_3\}\quad \{q_4\}\ \{q_5, q_6\}$



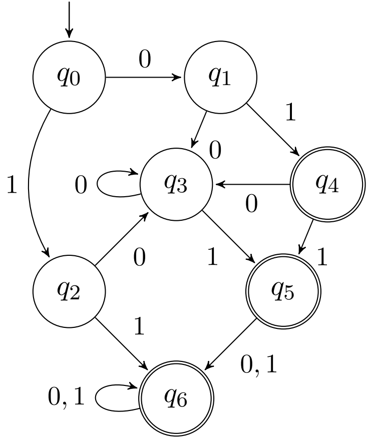
Exercice (suite)



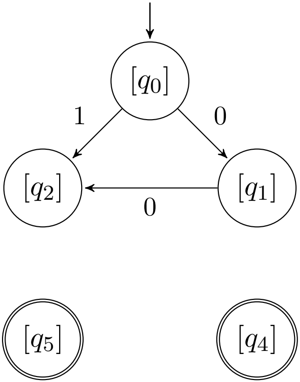
$\equiv : \{q_0\}\ \{q_1\}\ \{q_2, q_3\}\quad \{q_4\}\ \{q_5, q_6\}$



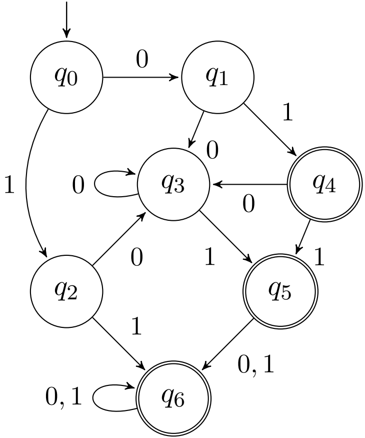
Exercice (suite)



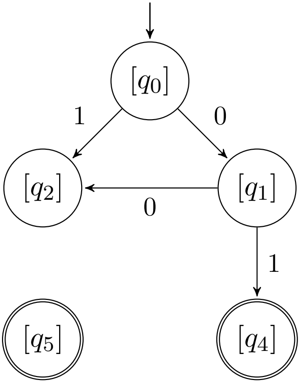
$$\equiv : \{q_0\}\ \{q_1\}\ \{q_2, q_3\}\quad \{q_4\}\ \{q_5, q_6\}$$



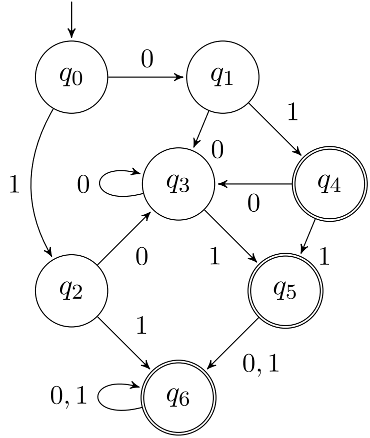
Exercice (suite)



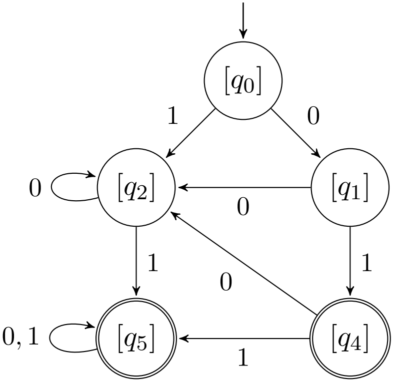
$\equiv : \{q_0\}\ \{q_1\}\ \{q_2, q_3\}\quad \{q_4\}\ \{q_5, q_6\}$



Exercice (suite)

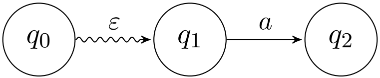


$\equiv : \{q_0\}\ \{q_1\}\ \{q_2, q_3\}\quad \{q_4\}\ \{q_5, q_6\}$



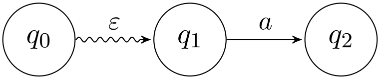
Récapitulatif

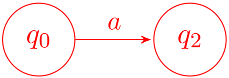
1. Suppression des ε-transitions



Récapitulatif

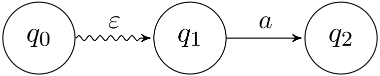
1. Suppression des ε-transitions

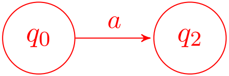




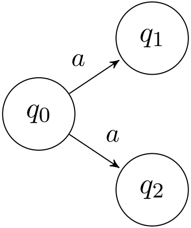
Récapitulatif

1. Suppression des ε-transitions



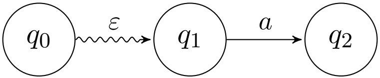


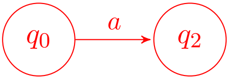
2. Déterminisation



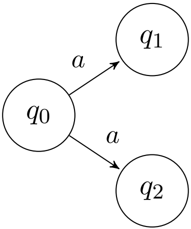
Récapitulatif

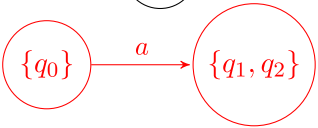
1. Suppression des ε-transitions





2. Déterminisation

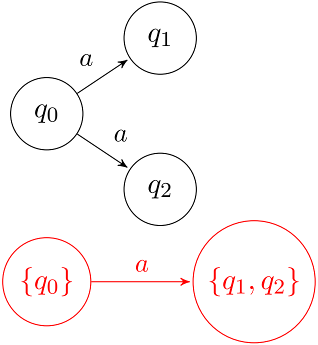




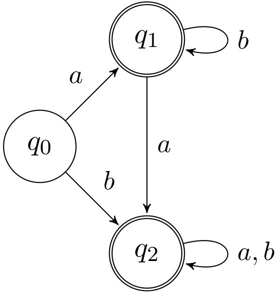
Récapitulatif

1. Suppression des ε-transitions

2. Déterminisation



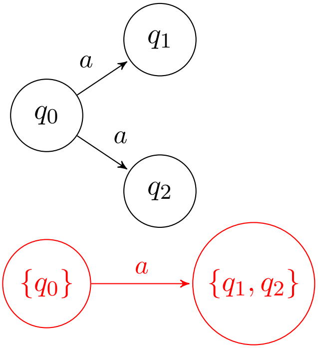
3. Minimisation



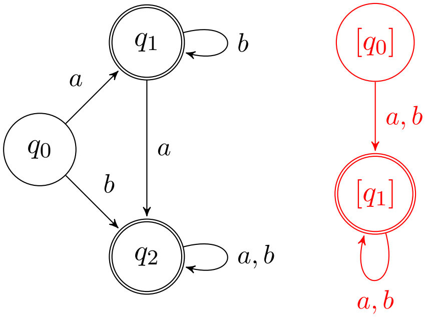
Récapitulatif

1. Suppression des ε-transitions

2. Déterminisation



3. Minimisation

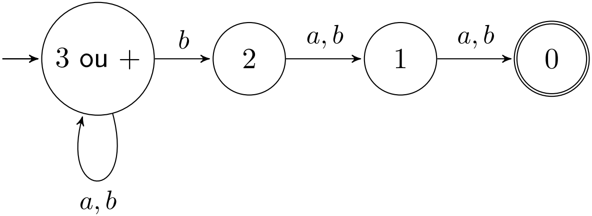


Bonus : exercice de déterminisation

On considère le langage

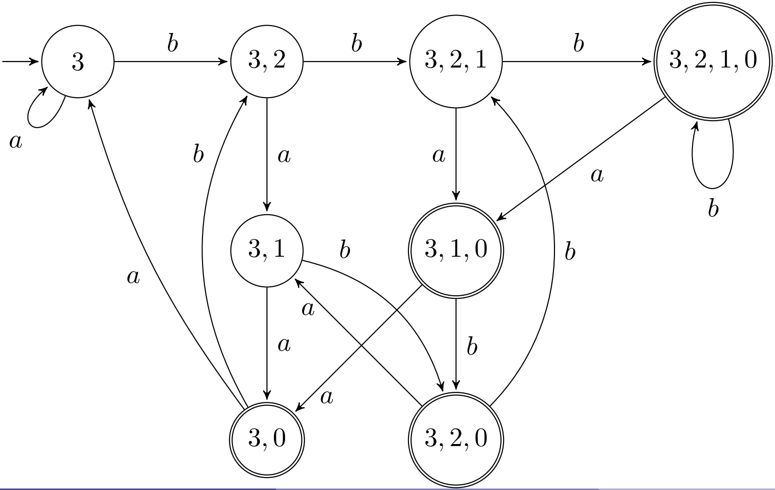
$$L = \{w \in \{a,b\}^* \mid \text{le 3}^{\text{e}} \text{ symbole en partant de la fin est un } b\}$$

Un automate non-déterministe qui le reconnaît est :



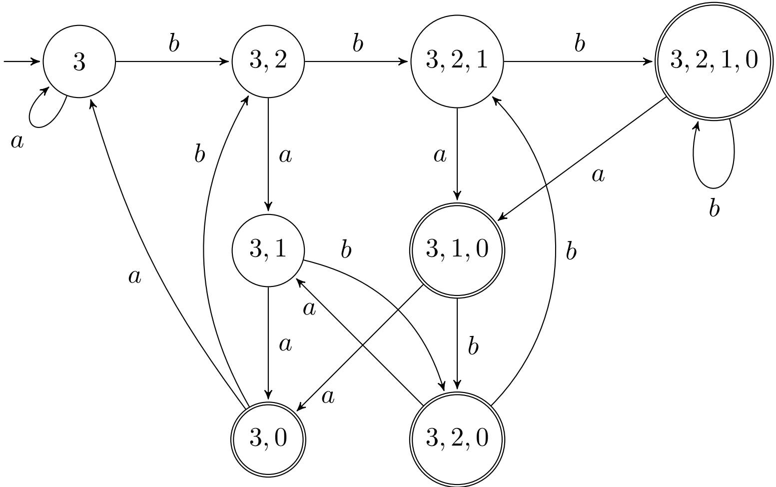
Construire un AFD (complet) équivalent.

Solution



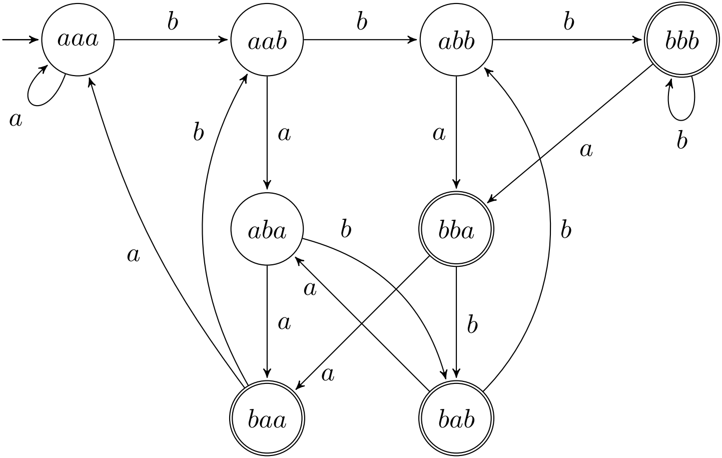
Solution

Les 8 états correspondent à toutes les valeurs possibles des 3 derniers symboles lus.



Solution

Les 8 états correspondent à toutes les valeurs possibles des 3 derniers symboles lus.



Solution

Les 8 états correspondent à toutes les valeurs possibles des 3 derniers symboles lus. L'automate déterminisite a exponentiellement plus d'états.

(et il est minimal)