

Théorie des Langages 1

Recueil d'exercices

1 Induction structurelle

Exercice 1 Soit V un vocabulaire et soit un sous-ensemble $A \subseteq V$. Dans cet exercice on considérera la fonction $|\cdot|_A : V^* \rightarrow \mathbb{N}$ qui à tout mot $w \in V^*$ associe le nombre d'occurrences d'éléments de A présents dans w . Ainsi, si $V = \{a, b, c, d\}$ et $A = \{a, b\}$, alors :

- $|cabdbacc|_A = 4$,
- $|bbaba|_A = 5$,
- $|ccdc|_A = 0$.

On pose $V = \{\wedge, \vee, \neg, \neg, (\, \perp, \top\}$, et on considère l'ensemble E des formules logiques défini par induction structurelle de la façon suivante :

Base. $\top \in E$ et $\perp \in E$.

Induction. Si w, w_1 et w_2 sont dans E , alors :

- $(\neg w) \in E$,
- $(w_1 \wedge w_2) \in E$,
- $(w_1 \vee w_2) \in E$.

▷ QUESTION 1 Est-ce que les deux mots suivants sont dans E ? On justifiera en quelques mots les réponses.

1. $(\top \wedge \neg)$
2. $(\top \wedge \top \wedge \top)$

▷ QUESTION 2 Montrer que $((\top \wedge \top) \vee (\perp \vee \top)) \in E$.

On définit les ensembles de symboles suivants :

$$\begin{aligned} U &= \{\neg\}, & B &= \{\wedge, \vee\}, \\ S &= \{\top, \perp\}, & N &= U \cup B \cup S. \end{aligned}$$

▷ QUESTION 3 Soit $w_1 = (\top \wedge ((\neg \perp) \vee (\top \wedge (\perp \vee (\neg \top))))))$. Calculer $|w_1|_U$, $|w_1|_B$ et $|w_1|_S$.

▷ QUESTION 4 Démontrer par induction structurelle que pour tout $w \in E$, on a $|w|_S = |w|_B + 1$.

▷ QUESTION 5 **[Avancé]** Soit $w \in E$. Exprimer $|w|$ en fonction de $|w|_B$ et $|w|_U$.

▷ QUESTION 6 **[Avancé]** Utiliser la question 5 pour justifier formellement les réponses à la question 1.

Exercice 2 Définir la fonction $|\cdot|_A$ de l'exercice 1 par induction structurelle sur V^* .

Exercice 3 Définitions inductives d'ensembles.

▷ QUESTION 1 Donner des définitions inductives des langages suivants :

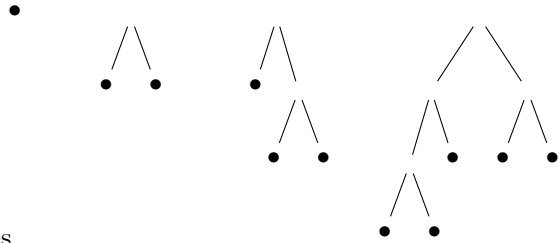
1. L'ensemble L_1 des mots sur $\{a, b\}$ de longueur paire.
2. L'ensemble L_2 des mots sur $\{a, b\}$ ne contenant pas deux a consécutifs.
3. L'ensemble L_3 des palindromes sur $\{a, b\}$.
4. **[Avancé]** L'ensemble L_4 des mots sur $\{a, b\}$ contenant un nombre pair de a .
5. **[Avancé]** L'ensemble L_5 des mots sur $\{a, b\}$ contenant autant de a que de b .

▷ QUESTION 2 **[Avancé]** Prouver que ces définitions inductives sont correctes.

Exercice 4

On s'intéresse aux arbres binaires, mais pour simplifier, on considère qu'ils ne contiennent pas de données. On rappelle qu'un arbre binaire est un arbre dont tous les noeuds internes ont exactement deux fils.

En voici ci-contre quatre exemples :



▷ QUESTION 1 Donner une définition inductive des arbres binaires.

▷ QUESTION 2 Montrer par induction structurale que dans un arbre binaire le nombre n_i de noeuds internes et le nombre n_f de feuilles (noeuds sans fils) satisfont la relation suivante : $n_f = n_i + 1$.

▷ QUESTION 3 La formule d'énumération d'un ensemble inductif formé à partir d'un ensemble de cas de base B et d'un ensemble de constructeurs inductifs K est :

$$E_0 \stackrel{\text{def}}{=} B,$$

$$E_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} E_n \cup \{\kappa_i(e_1, \dots, e_{k_i}) \mid \kappa_i \in K, e_1, \dots, e_{k_i} \in E_n\}$$

Donner les trois premiers ensembles E_n pour la définition des arbres binaires de la question précédente. Quelle est la hauteur des arbres contenus dans ces ensembles ? On rappelle que la hauteur d'un arbre est la longueur maximale d'un chemin de la racine (le noeud tout en haut de l'arbre) vers une feuille de l'arbre.

▷ QUESTION 4 [Avancé] Soit H_n l'ensemble des arbres binaires de hauteur inférieure ou égale à n . Montrer l'égalité $E_n = H_n$ par récurrence sur n .

Exercice 5 [Avancé] On considère un langage E_p d'expressions préfixées *sur des chiffres*. Pour cela, on définit les ensembles suivants :

$$\text{NUM} = \{\text{Zr, Un, De, Tr, Qu, Ci, Si, Sp, Hu, Ne}\},$$

$$\text{OP} = \{+, -, \times\}.$$

L'ensemble E_p est alors un langage sur le vocabulaire $V = \text{NUM} \cup \text{OP}$, dont les éléments sont des expressions arithmétiques sur des chiffres, où les opérateurs sont placés avant les opérandes.

Par exemple, l'expression préfixée correspondant à $1 + 2$ est $+ \text{Un De}$; l'expression préfixée correspondant à $(2 + 3) \times (3 - 1)$ est $\times + \text{De Tr} - \text{Tr Un}$.

▷ QUESTION 1 Donner une définition inductive du langage E_p .

On considère la fonction **eval** : $E_p \rightarrow \mathbb{N}$, qui calcule la valeur d'une expression préfixée. Par exemple, si $w = \times + \text{De Tr} - \text{Tr Un}$ alors **eval**(w) = 10.

▷ QUESTION 2 Donner une définition inductive de la fonction **eval**.

Pour un mot $w \in E_p$ donné, on note $|w|_{\text{NUM}}$ le nombre d'éléments de NUM présents dans w , et on note $|w|_{\text{OP}}$ le nombre d'éléments de OP présents dans w .

▷ QUESTION 3 Prouver par induction structurale que pour tout $w \in E_p$, on a $|w|_{\text{NUM}} = |w|_{\text{OP}} + 1$.

2 Langages

Exercice 6 [A savoir faire] Soit L un langage. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\varepsilon \in L$
- (ii) $\forall i \geq 0, \varepsilon \in L^i$
- (iii) $\forall i \geq 0, L^i \subseteq L^{i+1}$

Exercice 7 On considère dans cet exercice des langages définis sur $V = \{a, b\}$.

▷ QUESTION 1 Définir **par concaténation et itération** le langage L_1 des mots constitués d'une séquence de a suivie d'une séquence de b . Les séquences peuvent éventuellement être vides.

▷ QUESTION 2 Définir **par induction** le langage L_2 des mots de la forme $a^n b^n$ avec $n > 0$.

▷ QUESTION 3 Définir **à l'aide des opérations ensemblistes classiques** et des langages précédents le langage L_3 des mots de la forme $a^i b^j$ avec $i \neq j$.

Exercice 8 Soit V un vocabulaire. Etant donnés deux mots $x, z \in V^*$, on dit que x est conjugué à z s'il existe un mot $y \in V^*$ tel que $xy = yz$. On souhaite prouver que x est conjugué à z si et seulement si il existe deux mots $u, v \in V^*$ tels que $x = uv$ et $z = vu$.

▷ QUESTION 1 Montrer que s'il existe deux mots $u, v \in V^*$ tels que $x = uv$ et $z = vu$ alors x est conjugué à z .

▷ QUESTION 2 On suppose que x est conjugué à z et que $x = \varepsilon$. Déterminer u et v tels que $x = uv$ et $z = vu$.

On suppose maintenant que x est conjugué à z et que $x \neq \varepsilon$. Soit alors y **de longueur minimale** tel que $xy = yz$.

▷ QUESTION 3 Montrer qu'on a nécessairement $|x| \geq |y|$.

▷ QUESTION 4 En déduire l'existence de u et v tels que $x = uv$ et $z = vu$.

▷ QUESTION 5 [**Avancé**] Montrer que la relation de conjugaison est une relation d'équivalence.

Exercice 9 [A savoir faire] Etant donné un ensemble E , on rappelle qu'une relation ρ sur E est un sous-ensemble de $E \times E$. La relation ρ est :

- Réflexive si pour tout $x \in E$, on a $(x, x) \in \rho$.
- Symétrique si pour tout $x, y \in E$, on a $(x, y) \in \rho$ si et seulement si $(y, x) \in \rho$.
- Antisymétrique si pour tout $x, y \in E$, si $(x, y) \in \rho$ et $(y, x) \in \rho$, alors $x = y$.
- Transitive si pour tout $x, y, z \in E$, si $(x, y) \in \rho$ et $(y, z) \in \rho$, alors $(x, z) \in \rho$.

Soit $E = \{a, b, c, d, e\}$, et considérons la relation ρ définie par :

$$\rho = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, d), (d, e)\}.$$

Construire les relations suivantes :

1. La fermeture réflexive de ρ (i.e. la plus petite relation réflexive contenant ρ).
2. La fermeture symétrique de ρ (i.e. la plus petite relation symétrique contenant ρ).
3. La fermeture transitive de ρ (i.e. la plus petite relation transitive contenant ρ).

Exercice 10 Soient L et M des langages sur un vocabulaire V . Montrer que si $L \subseteq M$ alors $L^* \subseteq M^*$. La réciproque est-elle vraie? Justifier.

Exercice 11 Pour chacune des égalités suivantes identifier celles qui sont vraies et celles qui sont fausses. Pour la première catégorie on donnera une intuition de la preuve. Pour la seconde catégorie on donnera des contre-exemples et on identifiera les inclusions uni-directionnelles.

1. $L^* = (L^*)^*$
2. $L^* \cup M^* = (L \cup M)^*$
3. $(L^* \cup M^*)^* = (L \cup M)^*$
4. $L^+ = L^* \setminus \{\varepsilon\}$
5. $(LM)^* = L^*M^*$
6. $(L \cup M)^* = (L^*M^*)^*$

3 Automates finis et modélisation

Exercice 12 Construire des automates reconnaissant les langages suivants :

1. L'ensemble des nombres binaires sans zéro inutile en tête.
2. Les mots sur $\{a, b\}$ contenant deux a et/ou deux b consécutifs.
3. Les mots sur $\{a, b\}$ contenant un nombre pair de a et un nombre pair de b .

Exercice 13 L'ensemble des littéraux numériques en Python forme un langage, formellement défini dans https://docs.python.org/3/reference/lexical_analysis.html#numeric-literals. Dans cet exercice, on considère un sous-ensemble des littéraux entiers et flottants écrits en base 10. Ils sont composés d'une partie entière, d'une partie décimale optionnelle et d'un exposant optionnel; ils sont définis sur le vocabulaire

$$V \stackrel{\text{def}}{=} \{0, \dots, 9, e, E, ., +, -\}.$$

On définit les huit ensembles suivants (suite sur la page suivante) :

$$\begin{aligned} \text{nonzerodigit} &\stackrel{\text{def}}{=} \{1, \dots, 9\} \\ \text{digit} &\stackrel{\text{def}}{=} \{0\} \cup \text{nonzerodigit} \\ \text{integer} &\stackrel{\text{def}}{=} \text{nonzerodigit}(\text{digit}^*) \cup \{0\}^+ \\ \text{dot} &\stackrel{\text{def}}{=} \{.\} \\ \text{pointfloat} &\stackrel{\text{def}}{=} (\text{digit}^*)\text{dot}(\text{digit}^+) \cup (\text{digit}^+)\text{dot} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{exponent} &\stackrel{\text{def}}{=} \{e, E\} \{\varepsilon, +, -\} \text{digit}^+ \\ \text{exponentfloat} &\stackrel{\text{def}}{=} (\text{digit}^+ \cup \text{pointfloat}) \text{exponent} \\ \text{number} &\stackrel{\text{def}}{=} \text{integer} \cup \text{pointfloat} \cup \text{exponentfloat} \end{aligned}$$

- ▷ QUESTION 1 Parmi les mots suivants, lesquels appartiennent à **number**? Lesquelles n'y appartiennent pas?
.314, .3E+4, 0.5E-2, 0000, E67, 1E7e3, 6E+1234, 2E++3.4
- ▷ QUESTION 2 Donner un automate qui reconnaît le langage **integer**.
- ▷ QUESTION 3 Donner un automate qui reconnaît le langage **number**.

Exercice 14 Un fermier cherche à faire traverser une rivière à son chou, sa chèvre et son loup. Pour cela, il dispose d'une petite barque qui ne permet de transporter qu'un seul des trois à la fois (en plus de lui-même). Étant donné que le loup mange la chèvre et que la chèvre mange le chou, le fermier doit faire attention à qui ou quoi il laisse seuls sur chacune des rives. Le fermier peut-il faire traverser la rivière au chou, à la chèvre et au loup sans qu'aucun ne se fasse dévorer?

- ▷ QUESTION 1 Représenter le problème par un automate, en précisant le vocabulaire choisi.
- ▷ QUESTION 2 Comment déterminer une stratégie à partir de l'automate? Quelles sont les stratégies optimales?

Exercice 15 [A savoir faire] Donner des automates reconnaissant les langages suivants :

1. $L_1 = \{\omega \in \{a, b\}^* \mid \omega \text{ contient au moins un } a \text{ et un } b\}$.
2. $L_2 = \{\omega \in \{a, b\}^* \mid \omega \text{ ne contient pas deux } a \text{ consécutifs}\}$.
3. $L_3 = \{\omega \in \{a, b\}^* \mid \omega \text{ ne contient pas plus de deux } a \text{ consécutifs}\}$.
4. $L_4 = \{\omega \in \{a, b\}^* \mid \omega \text{ a } bab \text{ pour suffixe}\}$.
5. $L_5 = \{\omega \in \{a, b\}^* \mid \text{la cinquième lettre de } \omega \text{ est un } a\}$.

Exercice 16 [A savoir faire] Soit L_2 le langage défini inductivement de la façon suivante :

- $\varepsilon \in L_2$.
- Si $w \in L_2$, alors $bw \in L_2$.
- Si $w_1, w_2, w_3 \in L_2$, alors $w_1aw_2aw_3 \in L_2$.

- ▷ QUESTION 1 Définir L_2 en compréhension.
 ▷ QUESTION 2 Donner un automate qui reconnaît ce langage.

Exercice 17 [Avancé] On considère un vocabulaire V et une relation $R \subseteq V \times V$. On définit

$$H_R \stackrel{\text{def}}{=} \{w_1 \cdots w_k \mid k \geq 2, \forall 1 \leq i < k, (w_i, w_{i+1}) \in R\}.$$

Autrement dit, la relation R impose des contraintes sur les symboles qui peuvent se suivre au sein des mots de H_R . Le but de cet exercice est de montrer que H_R est régulier.

On pose $V_0 = \{a, b, c, d, e\}$ et $R_0 = \{(a, b), (b, e), (d, d), (a, c), (d, c), (e, d)\}$.

- ▷ QUESTION 1 Enumérer les mots de H_{R_0} de longueur inférieure ou égale à 3.
 ▷ QUESTION 2 Construire un automate qui reconnaît H_{R_0} .
 ▷ QUESTION 3 En supposant V et R **quelconques**, démontrer que le langage H_R est reconnu par un automate fini.

Exercice 18 [Avancé] Donner en français un algorithme qui prend en entrée deux automates et qui teste si oui ou non ils reconnaissent le même langage.

Exercice 19 [Avancé] Soit L un langage régulier sur un vocabulaire V . On définit le langage \sqrt{L} de la façon suivante :

$$\sqrt{L} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in V^* \mid xx \in L\}.$$

Démontrer que \sqrt{L} est régulier.

Exercice 20 Le produit de deux automates est défini de la façon suivante : soient $A_1 = (Q_1, V, \delta_1, \{i_1\}, F_1)$ et $A_2 = (Q_2, V, \delta_2, \{i_2\}, F_2)$ deux automates qu'on suppose complets et sans ε -transition. On considère l'automate

$$A_1 \times A_2 \stackrel{\text{def}}{=} (Q_1 \times Q_2, V, \delta, \{\langle i_1, i_2 \rangle\}, F_1 \times F_2),$$

où δ est défini par : pour tous $\langle q_1, q_2 \rangle, \langle q'_1, q'_2 \rangle \in Q_1 \times Q_2$ et pour tout $a \in V$,

$$\langle \langle q_1, q_2 \rangle, a, \langle q'_1, q'_2 \rangle \rangle \in \delta \text{ si et seulement si } (q_1, a, q'_1) \in \delta_1 \wedge (q_2, a, q'_2) \in \delta_2.$$

- ▷ QUESTION 1 Donner des automates complets et sans ε -transition qui reconnaissent :
 1. les mots sur $\{0, 1\}$ contenant un nombre pair de 0 ;
 2. les mots sur $\{0, 1\}$ contenant un nombre impair de 1.
 ▷ QUESTION 2 Calculer l'automate produit des deux automates de la question précédente. Constater qu'il reconnaît les mots sur $\{0, 1\}$ contenant un nombre pair de 0 **et** un nombre impair de 1.

On considère dans la suite deux automates A_1 et A_2 quelconques, complets et sans ε -transition. On souhaite prouver que $\mathcal{L}(A_1 \times A_2) = \mathcal{L}(A_1) \cap \mathcal{L}(A_2)$.

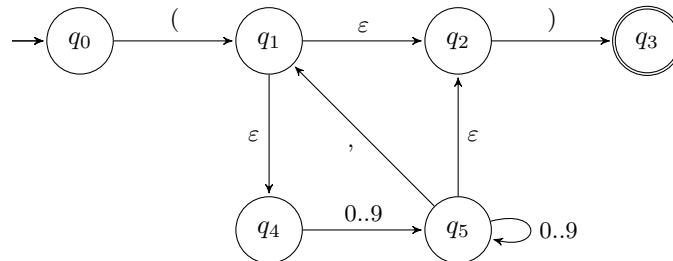
- ▷ QUESTION 3 **[Avancé]** Montrer par induction sur w l'équivalence entre les deux propositions suivantes :
 1. il existe un chemin de trace w de l'origine p_1 à l'extrémité q_1 dans A_1
 et il existe un chemin de trace w de l'origine p_2 à l'extrémité q_2 dans A_2 ;
 2. il existe un chemin de trace w de l'origine $\langle p_1, p_2 \rangle$ à l'extrémité $\langle q_1, q_2 \rangle$ dans $A_1 \times A_2$.
 ▷ QUESTION 4 En déduire que $\mathcal{L}(A_1 \times A_2) = \mathcal{L}(A_1) \cap \mathcal{L}(A_2)$.
 ▷ QUESTION 5 Quel langage aurait été reconnu si l'ensemble des états finaux de $A_1 \times A_2$ avait été $(F_1 \times Q_2) \cup (Q_1 \times F_2)$ et non pas $F_1 \times F_2$? Justifier.

Exercice 25 [A savoir faire] On s'intéresse à l'ensemble des tuples d'entiers (simples) en Python. Dans ce langage, il est possible d'écrire :

- Le tuple vide : ()
- Un tuple à un élément : (42,)
- Un couple : (42, 29) ou bien (42, 29,)
- Un triplet : (12, 25, 37) ou bien (12, 25, 37,)
- etc...

En particulier, (123) ne représente **pas** un tuple : il s'agit de la valeur 123 entourée de parenthèses superflues. Les autres expressions telles que (,) ou encore (, 42, 29) sont interdites.

On propose l'automate suivant pour reconnaître les tuples d'entiers.



Construire un automate sans ε -transition équivalent à celui proposé. L'automate proposé répond-il bien aux spécifications ? Justifier.

Exercice 26 Soit $A = (Q, V, \delta, I, F)$ un automate. On rappelle qu'un état $q \in Q$ est *accessible dans A* s'il existe un chemin dans A dont l'origine est dans I et l'extrémité est q . L'état q est *productif dans A* s'il existe un chemin dans A dont l'origine est q et l'extrémité est dans F .

On note $\text{Acc}(A)$ l'ensemble des états accessibles dans A , et $\text{Prod}(A)$ l'ensemble des états productifs dans A .

▷ QUESTION 1 Soit $Q = \{p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\}$. On considère l'automate $A = (Q, \{a, b\}, \delta, \{p_0, p_1\}, \{p_3, p_4\})$, où la relation de transition δ est définie par :

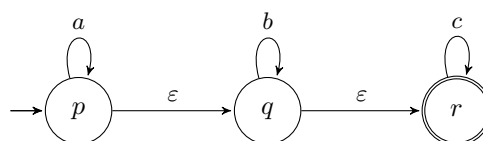
δ	a	b
p_0	p_1	p_2
p_1	-	p_3
p_2	p_1	p_3, p_4
p_3	-	-
p_4	-	p_3
p_5	p_6	p_4
p_6	p_4	p_4

Déterminer les ensembles $\text{Acc}(A)$ et $\text{Prod}(A)$.

On considère maintenant un automate A **quelconque, sans ε -transition**.

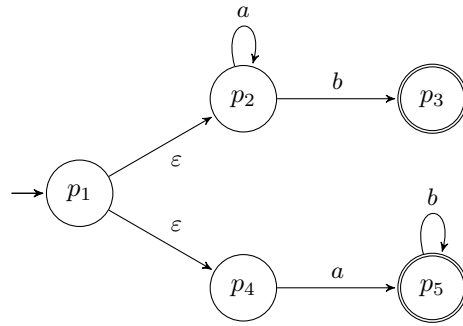
- ▷ QUESTION 2 Définir un algorithme qui calcule l'ensemble des états accessibles dans A .
- ▷ QUESTION 3 Même question pour l'ensemble des états productifs dans A .
- ▷ QUESTION 4 Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\text{Acc}(A)$ et $\text{Prod}(A)$ pour que $\mathcal{L}(A) \neq \emptyset$.
- ▷ QUESTION 5 Donner une condition nécessaire et suffisante sur A permettant d'assurer $\mathcal{L}(A) = V^*$?

Exercice 27 [A savoir faire] Construire un automate sans ε -transition équivalent à celui ci-après. Quel est le langage reconnu par cet automate ?



5 Détermination

Exercice 28 [A savoir faire] Déterminer l'automate suivant :



Exercice 29 [A savoir faire] Construire des automates déterministes reconnaissant les langages sur $\{a, b\}$ suivants :

1. L'ensemble des mots terminés par ab ou bien par ba .
2. L'ensemble des mots contenant au moins deux fois la séquence ab .
3. Le langage $\{aab\}^*\{b\}$.
4. Le langage $\{a\}^*\{aba\}^*$.

Exercice 30 [A savoir faire] On s'intéresse au langage L des mots binaires dont le dernier bit est un bit de parité. Plus précisément, un mot $wx \in \{0, 1\}^+$ est dans L si le nombre de 1 dans w est impair et x vaut 1, ou si le nombre de 1 dans w est pair et x vaut 0. Autrement dit, on choisit x pour que le nombre de 1 dans wx soit pair.

Exemples : 0, 011011, 1010 et 001111 sont dans L .

Contre-exemples : 11010, 110001 et ε ne sont pas dans L .

Construire un automate déterministe complet reconnaissant L .

Exercice 31 [A savoir faire] Construire des automates déterministes complets reconnaissant :

1. les nombres entiers > 0 , en base 10, qui sont des multiples de 100 ;
2. les nombres entiers > 0 , en base 10, qui sont des multiples de 3 ;
3. **[Avancé]** pour n et k entiers, les nombres entiers > 0 , en base k , qui sont multiples de n .

Exercice 32 [A savoir faire] Soit $Q = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$. On considère l'automate $A = (Q, \{a, b, c\}, \delta, \{p_1\}, \{p_3, p_4\})$, où la relation de transition δ est définie par :

δ	a	b	c	ε
p_1	p_1, p_2	-	p_3	-
p_2	-	p_1	-	p_3
p_3	-	p_3, p_4	-	-
p_4	-	p_4	-	-

Construire un automate déterministe complet équivalent à A .

Exercice 33 Un barman aveugle portant des gants de boxe joue au jeu suivant avec l'un de ses clients réguliers : quatre verres sont disposés en carré sur un plateau circulaire pouvant pivoter autour de son centre. Au début du jeu, le client pose les verres dans le sens qu'il souhaite. Par la suite, le barman et le client jouent à tour de rôle. L'objectif du barman est de mettre tous les verres dans le même sens : soit tous à l'endroit, soit tous à l'envers. Pour cela, il peut retourner n'importe quel sous-ensemble des verres. Après chaque mouvement du barman, le client peut faire pivoter le plateau d'un ou plusieurs quarts de tour (y compris zéro ou des tours complets). Évidemment, comme le barman ne peut savoir s'il a gagné (il est aveugle et porte des gants de boxe), le client arrête le jeu lorsque le barman gagne.

La question est la suivante : le barman possède-t-il une stratégie gagnante ? Si oui, quelle est la stratégie optimale (i.e. celle avec un nombre minimum de coups) ?

▷ QUESTION 1 En utilisant les symétries du problème, déterminer quels sont les états du plateau pertinents pour le barman. Faire de même pour les coups du barman.

▷ QUESTION 2 Donnez un automate A décrivant toutes les transitions possibles entre les états du plateau, en fonction des coups du barman. On ne s'occupe ici que de la fonction de transition et on fixera les états initiaux et finaux plus tard.

▷ QUESTION 3 Donnez un automate A_{client} (éventuellement non déterministe) qui donne toutes les séquences de coups du barman pour lesquels le client peut gagner (à condition de faire toujours les bons choix). Autrement dit, il faut reprendre l'automate précédent et supprimer les états et transitions qui feraient perdre le client puis fixer les états initiaux et finaux.

Pour trouver une stratégie gagnante pour le barman, il faut trouver une suite de coups après laquelle le client ne peut plus gagner, c'est à dire qui rend nécessairement dans un état puits (ou un ensemble d'états puits).

▷ QUESTION 4 Déterminiser A_{client} et en déduire la réponse à notre problème.

▷ QUESTION 5 Que faut-il modifier si la condition de fin de partie est que tous les verres soient tous à l'endroit (et non tous à l'envers) ?

▷ QUESTION 6 [Avancé] Le barman a-t-il une stratégie gagnante quel que soit le nombre de verres ?

Exercice 34 Pour $k > 0$, soit L_k le langage constitué des mots sur $\{0, 1\}$ de longueur au moins k , et dont le $k^{\text{ième}}$ symbole **en partant de la fin** est un 1. Par exemple, 00101 et 100110111 sont dans L_3 . Formellement,

$$L_k \stackrel{\text{def}}{=} \{a_1 \dots a_n \mid n \geq k \wedge a_{n-k+1} = 1\}.$$

▷ QUESTION 1 Construire un automate (non-déterministe) à $k + 1$ états qui reconnaît L_k .

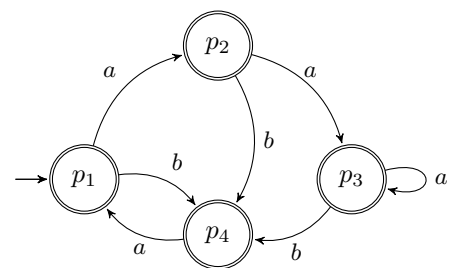
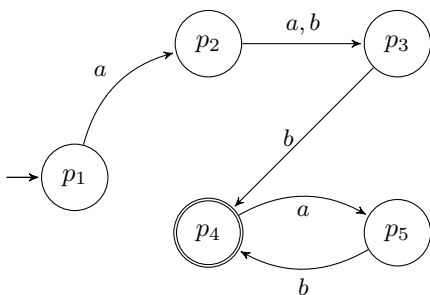
▷ QUESTION 2 Construire un automate déterministe complet minimal reconnaissant L_2 .

On cherche à borner la taille minimale d'un automate déterministe complet reconnaissant L_k . Soit $A = (Q, \{0, 1\}, \delta, \{q_0\}, F)$ un automate déterministe complet reconnaissant L_k . On définit $f : \{0, 1\}^k \rightarrow Q$, qui à tout mot u de longueur k associe $\delta^*(q_0, u)$. Autrement dit, $f(u)$ est l'état atteint par le chemin de trace u dans A , partant de q_0 .

▷ QUESTION 3 [Avancé] Montrer que f est injective. En déduire une borne inférieure de la taille de A .

6 Minimisation

Exercice 35 Minimiser les automates suivants :



Exercice 36 Soit $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$. Déterminiser et minimiser l'automate $A = (Q, \{a, b\}, \delta, \{q_0\}, \{q_4\})$, où la relation de transition δ est récapitulée ci-dessous :

δ	a	b	ε
q_0	q_1	\times	q_3, q_4
q_1	q_1	q_0	\times
q_2	\times	q_4	q_1
q_3	q_3	q_1	\times
q_4	\times	\times	q_3

Exercice 37 [A savoir faire] Construire les automates minimaux reconnaissant les langages suivants sur $\{a, b\}$:

1. L'ensemble des mots de longueur paire et terminés par ab .
2. L'ensemble des mots contenant la sous-chaîne aa .
3. L'ensemble $\{a\}\{aa, bb\}^*\{a, b\}^*\{b\}$.

7 Expressions régulières

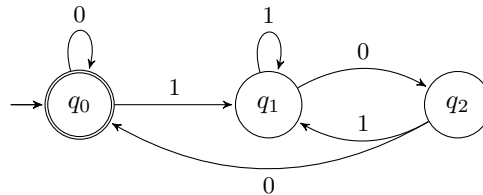
Exercice 38 [A savoir faire] Soit E une expression régulière. Simplifier les expressions suivantes :

- | | | |
|-----------------------|------------------|--------------------|
| 1. $E.E^* + \epsilon$ | 3. \emptyset^* | 5. $\emptyset.E$ |
| 2. $\epsilon.E$ | 4. ϵ^* | 6. $\emptyset + E$ |

Exercice 39 Donner une expression régulière représentant chacun des langages suivants :

1. Les mots sur $\{0, 1\}$ contenant deux 0 et/ou deux 1 consécutifs.
2. Les mots sur $\{0, 1\}$ où chaque 0 est suivi d'un 1.
3. Les mots sur $\{0, 1\}$ contenant au moins un 0.
4. Les mots sur $\{0, 1\}$ composés de 0 et de 1 alternés.
5. Les mots sur $\{0, 1\}$ de longueur paire.

Exercice 40 Calculer l'expression régulière correspondant à l'automate ci-dessous, en résolvant le système d'équations obtenu dans deux ordres différents, puis en utilisant la méthode par suppression d'états dans les mêmes ordres. Constaté que les systèmes associés aux automates avec certains états supprimés correspondent aux différentes étapes de résolution du système initial.



Exercice 41 [A savoir faire] Caractériser (par une phrase en français) les langages représentés par les expressions régulières suivantes :

1. $0^*(10^*10^*10^*)^*$
2. $(1 + 01 + 001)^*(\epsilon + 0 + 00)$
3. $1^*(0 + \epsilon)1^*$

Exercice 42 [A savoir faire] Nous considérons une représentation des messages codés en Morse à l'aide du formalisme suivant. Les signaux qui peuvent être émis sont :

- le signal de début de phrase : D ;
- les signaux pour constituer des mots : L (signal long) et C (signal court)
- le signal de fin de phrase : F .

Un mot en Morse est une succession de trois signaux, longs ou courts. Une phrase en Morse est une séquence non-vide de mots, précédée du signal de début de phrase, et terminée par le signal de fin de phrase. Un message en Morse est une séquence éventuellement vide de phrases.

Donner une expression régulière décrivant l'ensemble des messages valides en Morse.

Exercice 43 On considère les *expressions régulières étendues*, qui sont obtenues en ajoutant aux expressions régulières les constructions suivantes :

- si E est une E.R., alors $\neg E$ est une E.R. étendue ;
- si E et E' sont des E.R., alors $E \cap E'$ est une E.R. étendue ;
- si E est une E.R., alors E^+ est une E.R. étendue.

La sémantique de ces opérateurs est la suivante :

- $\mathcal{L}(\neg E) = V^* \setminus \mathcal{L}(E)$;
- $\mathcal{L}(E \cap E') = \mathcal{L}(E) \cap \mathcal{L}(E')$;
- $\mathcal{L}(E^+) = \mathcal{L}(E) \cdot \mathcal{L}(E)^*$.

Démontrer qu'à toute E.R. étendue est associé un langage régulier.

Exercice 44 [A savoir faire] Donner une expression régulière représentant l'ensemble des mots avec un nombre pair de 0 et un nombre impair de 1, en définissant un automate reconnaissant ce langage et en résolvant les équations associées.

Exercice 45 [Avancé] Etant donnée une expression régulière E , on définit la *hauteur d'étoile de E* comme le nombre d'étoiles de Kleene imbriquées dans E . Par exemple, $H_K(a) = H_K((a+b).(c+d)) = 0$, $H_K(a^*) = H_K(ab^*(a+c)^*) = 1$ et $H_K((ab^*c)^*) = 2$.

▷ QUESTION 1 Définir formellement la fonction H_K sur l'ensemble des expressions régulières par induction structurelle.

La notion de hauteur d'étoile est étendue aux langages réguliers : si L est un langage régulier, alors $H_K(L)$ est défini par :

$$H_K(L) = \min\{H_K(E) \mid \mathcal{L}(E) = L\}.$$

▷ QUESTION 2 Soit $E = a(a^*b^*)^*bb$. Quelle est la valeur de $H_K(E)$? Quelle est la valeur de $H_K(\mathcal{L}(E))$?

▷ QUESTION 3 Soit L un langage régulier. Démontrer que L est fini si et seulement si $H_K(L) = 0$.

8 Propriétés de clôture

Exercice 46 On admet que $M = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ n'est pas régulier. Montrer que les langages suivants ne sont pas réguliers non plus **sans se servir du lemme de l'étoile** :

1. $L_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ a autant de } a \text{ que de } b\}$
2. $L_2 = \{a^i b^j c^k \mid i + j = k \geq 0\}$
3. $L_3 = \{(ab)^{2n} (cd)^{2n} \mid n \geq 0\}$
4. **[Avancé]** $L_4 = \{uv \in \{a, b\}^* \mid vu \in \{a^n b^n \mid n \geq 0\}\}$

Exercice 47 En utilisant le lemme de l'étoile, montrer que les langages suivants ne sont pas réguliers :

1. $L_1 = \{wb^n \mid n \in \mathbb{N}, w \in \{a, b\}^n\}$
2. $L_2 = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ est un palindrome}\}$
3. **[Avancé]** $L_3 = \{1^{i^2} \mid i \geq 0\}$
4. **[Avancé]** $L_4 = \{1^p \mid p \text{ est premier}\}$

Exercice 48 Etant donné un vocabulaire V , on considère une famille $(L_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de langages sur V^* telle que pour tout $i \in \mathbb{N}$, L_i est un langage régulier.

▷ QUESTION 1 Soit $n \geq 0$. Montrer que le langage $M_n = \bigcup_{0 \leq i \leq n} L_i$ est régulier.

▷ QUESTION 2 Peut-on en déduire que $\bigcup_{0 \leq i} L_i$ est régulier ? Justifier.

Exercice 49 Equivalence entre automates

- ▷ QUESTION 1 Donner une méthode pour déterminer si deux automates sont équivalents.
- ▷ QUESTION 2 Si deux automates ne sont pas équivalents, comment faire pour exhiber un contre-exemple, c.-à-d. un mot accepté par l'un mais pas par l'autre ?
- ▷ QUESTION 3 En se basant sur la construction de l'automate produit (exercice 20), comment faire cette construction plus directement ?

Exercice 50 [A savoir faire] Les langages suivants sont-ils réguliers ?

1. $L_1 = \{a^n b^m \mid n \neq m\}$.
2. $L_2 = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \neq |w|_b\}$.

Exercice 51 [A savoir faire] Description des commentaires en C et OCaml

Un commentaire du langage C commence par `/*` et se termine au premier `*/` rencontré. Ainsi, il ne peut y avoir de `*/` au milieu d'un commentaire.

Exemples : les mots `/**`, `/***/`, `/***/`, `/*/*` sont des commentaires mais `/*` et `/***/` n'en sont pas.

- ▷ QUESTION 1 Le langage des commentaires en C est-il régulier ? Si oui, donner un automate qui le reconnaît. Si non, le démontrer et donner une grammaire hors-contexte qui le génère.

Un commentaire du langage OCaml commence par `(*` et se termine par `*)`. Contrairement à C, il est possible d'imbriquer des commentaires. Exemples : les mots `(**)`, `(***)`, `(*(***)`, `(***)` sont des commentaires mais `(*`, `(***)` et `(***)` n'en sont pas.

- ▷ QUESTION 2 Mêmes questions que pour le langage C.

9 Grammaires et Hiérarchie de Chomsky

Exercice 52 Langages hors-contextes et langages réguliers

- ▷ QUESTION 1 Donner des grammaires hors-contextes engendrant les langages suivants :

1. $\{a^n b^p \mid n \geq p \geq 0\}$
2. $\{a^n b^p \mid n \neq p\}$
3. $\{a^n b^p \mid 2p \geq n \geq p\}$
4. $\{a^n b^p c^q \mid n + p = q\}$

- ▷ QUESTION 2 Donner des grammaires régulières engendrant les langages suivants :

1. les mots sur $\{a, b\}$ ayant un nombre pair de a et impair de b
2. **[A savoir faire]** l'ensemble des constantes entières sans 0 inutiles en tête

Exercice 53 Opérations sur les langages

Soient $G_1 = (V_T, V_{N_1}, S_1, R_1)$ et $G_2 = (V_T, V_{N_2}, S_2, R_2)$ deux grammaires. On supposera sans perte de généralité que $V_{N_1} \cap V_{N_2} = \emptyset$.

- ▷ QUESTION 1 Donner une grammaire G telle que $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(G_1) \cup \mathcal{L}(G_2)$. Comment prouver que cette grammaire est correcte ?

- ▷ QUESTION 2 Même question pour les langages $\mathcal{L}(G_1) \cdot \mathcal{L}(G_2)$ et $\mathcal{L}(G_1)^*$.

- ▷ QUESTION 3 Appliquer vos transformations sur les grammaires G_1 et G_2 suivantes :

$$\begin{aligned} G_1 & : S_1 \rightarrow aS_1b \mid c \\ G_2 & : S_2 \rightarrow d \end{aligned}$$

- ▷ QUESTION 4 En supposant que G_1 et G_2 soient de type T (régulière, hors-contexte) que peut-on dire des grammaires proposées aux deux premières questions ?

Exercice 54 Langages sous-contextes

▷ QUESTION 1 Soit la grammaire $G = (\{a, b, c\}, \{S, B, C\}, S, R)$ avec R l'ensemble des règles suivantes :

$$\begin{array}{ll} (1) & S \rightarrow abc \\ (2) & S \rightarrow aSBc \\ (3) & cB \rightarrow Bc \\ (4) & bB \rightarrow bb \end{array}$$

- a) Justifier le type de cette grammaire.
 - b) Construire une dérivation du mot $aabbcc$.
 - c) Soit un mot quelconque de la forme $a^n b^n c^n$ avec $n > 0$. Donner une méthode générale permettant de produire ce mot à partir de la grammaire précédente.
- ▷ QUESTION 2 [Avancé] Donner une grammaire sous-contexte engendrant les mots de la forme wcw avec $w \in \{a, b\}^*$. On pourra partir de la grammaire suivante, qui engendre les mots de la forme $wc\tilde{w}$ avec \tilde{w} l'image miroir de w :

$$S \rightarrow aSa \mid bSb \mid c$$

Exercice 55 Langage des carrés

Soit $V_T = \{0, 1\}$. Le langage W des mots de la forme ww n'est pas hors-contexte mais on peut montrer que son complémentaire C l'est.

- ▷ QUESTION 1 Soit Y le langage des mots sur V_T de longueur impaire dont le milieu est 0. Soit Z le langage des mots sur V_T de longueur impaire dont le milieu est 1. Donner une grammaire hors-contexte pour chacun de ces langages.
- ▷ QUESTION 2 Montrer que tout mot de $YZ \cup ZY$ n'est pas de la forme ww .
- ▷ QUESTION 3 Montrer que tout mot de longueur paire qui n'est pas de la forme ww appartient à $YZ \cup ZY$. En déduire une grammaire pour C .

Exercice 56 Forme réduite d'une grammaire

Soit $G = (V_T, V_N, S, R)$ une grammaire hors-contexte. On donne les définitions suivantes :

- un symbole A de V_N est dit *productif* si et seulement si il existe une dérivation $A \implies^* w$ avec $w \in V_T^*$;
- un symbole A de V_N est dit *accessible* si et seulement si il existe une dérivation $S \implies^* w_1Aw_2$ avec $w_1, w_2 \in (V_T \cup V_N)^*$.

▷ QUESTION 1 Soit la grammaire $G = (\{a, b, c, d\}, \{S, A, B, C, D\}, S, R)$ avec R défini par :

$$\begin{array}{llllll} S \rightarrow AB & S \rightarrow \varepsilon & A \rightarrow aA & A \rightarrow D & & \\ B \rightarrow bB & B \rightarrow aS & C \rightarrow c & C \rightarrow cC & D \rightarrow dA & \end{array}$$

Donner l'ensemble Pr des symboles productifs de G ainsi que l'ensemble Ac des symboles accessibles.

- ▷ QUESTION 2 Soit $G = (V_T, V_N, S, R)$ une grammaire hors-contexte quelconque.
 1. Donner une définition inductive de l'ensemble Ac des non-terminaux accessibles dans G . En déduire une méthode permettant de calculer Ac à partir des règles de G .
 2. Même question pour l'ensemble Pr des non-terminaux productifs.
 3. En utilisant les résultats précédents, comment peut-on décider simplement si $\mathcal{L}(G) \neq \emptyset$?
- ▷ QUESTION 3 L'algorithme de « nettoyage » des grammaires est le suivant :
 1. On calcule Pr , l'ensemble des symboles productifs de la grammaire G , puis on construit $G' = (V_T, Pr, S, R')$ avec R' le sous-ensemble des règles de R ne contenant aucune occurrence d'un symbole non productif, ni en partie gauche, ni en partie droite : $R' = R - \{A \rightarrow w_1Bw_2 \mid A \notin Pr \vee B \notin Pr\}$.
 2. On calcule Ac , l'ensemble des symboles accessibles de G' , puis on construit $G'' = (V_T, Ac, S, R'')$ avec R'' le sous-ensemble des règles de R' ne contenant aucune occurrence d'un symbole non accessible, ni en partie gauche, ni en partie droite : $R'' = R' - \{A \rightarrow w_1Bw_2 \mid A \notin Ac \vee B \notin Ac\}$.

Appliquer cet algorithme à la grammaire $G = (\{a, b\}, \{S, A, C, D, E\}, S, R)$ pour R défini par :

$$S \rightarrow A \quad S \rightarrow a \quad A \rightarrow CD \quad C \rightarrow b \quad D \rightarrow A \quad E \rightarrow C$$

▷ QUESTION 4 En utilisant l'exemple précédent, montrer que l'algorithme naïf qui consisterait à construire la grammaire G' ci-après est faux (i.e. ne produit pas une grammaire réduite).

$G' = (V_T, Ac \cap Pr, S, R')$ avec R' le sous-ensemble des règles de R ne contenant aucune occurrence d'un symbole non accessible ou productif, ni en partie gauche, ni en partie droite : $R' = R - \{A \rightarrow w_1 B w_2 \mid A \notin Ac \vee B \notin Ac \vee A \notin Pr \vee B \notin Pr\}$.

Exercice 57 Grammaires régulières

On donne ci-après plusieurs manières de décrire les grammaires régulières. Soit $G = (V_T, V_N, S, R)$ une grammaire avec les restrictions suivantes :

Def1 : règles de la forme $A \rightarrow w$ ou $A \rightarrow wB$ avec $w \in V_T^*$, $A \in V_N$ et $B \in V_N$.

Def2 : règles de la forme $A \rightarrow xB$ ou $A \rightarrow \varepsilon$ avec $x \in V_T$ et $A \in V_N$ et $B \in V_N$.

▷ QUESTION 1 Soit L le langage défini sur le vocabulaire $\{a, b\}$ par $(ab)^*$. Une grammaire possible pour ce langage conforme à **Def1** est $S \rightarrow abS \mid \varepsilon$. Donner une grammaire conforme à **Def2** pour ce langage.

▷ QUESTION 2 Montrer que la classe des langages définie par ces deux formes de grammaire est la même.

10 Grammaires hors-contexte

Exercice 58 Grammaire ambiguë

▷ QUESTION 1 Montrer que les grammaires suivantes sont ambiguës et proposer des grammaires équivalentes non ambiguës :

$$\begin{array}{l} 1. S \rightarrow aSaS \quad S \rightarrow \varepsilon \\ 2. S \rightarrow aSb \quad S \rightarrow aS \quad S \rightarrow \varepsilon \end{array}$$

▷ QUESTION 2 Donner une grammaire non ambiguë pour le langage $\{a^n b^p \mid 2p \geq n \geq p\}$. Montrer que votre grammaire est non-ambiguë en appliquant les conditions suffisantes vues en cours.

▷ QUESTION 3 [**Avancé**] Une ε -règle est une règle de la forme $A \rightarrow \varepsilon$.

Une 1-règle est une règle de la forme $A \rightarrow B$ avec A et B éléments du vocabulaire non-terminal.

Soit G une grammaire hors-contexte ne contenant ni ε -règle ni 1-règle.

Pour tout mot $\omega \in \mathcal{L}(A)$, avec $A \in V_N$, on peut borner la longueur de la dérivation $A \Longrightarrow^* \omega$ en fonction de $|\omega|$. Soit $A \Longrightarrow^d \omega$. Montrer que $d \leq 2 * |\omega| - 1$.

Exercice 59 Preuves sur les grammaires

On définit deux langages L_1 et L_2 sur le vocabulaire $V = \{a, b\}$.

Soit $P_1(w)$ la propriété $|w|_a = |w|_b$ et $P_2(w)$ la propriété $\forall u \in \text{Prefixe}(w), |u|_a \geq |u|_b$. Rappelons que la notation $|w|_x$ représente le nombre d'occurrences du symbole x dans w et u est un préfixe de w si et seulement il existe un mot $v \in V^*$ tel que $uv = w$.

— **Définition de L_1 par compréhension** : $L_1 = \{w \mid P_1(w) \wedge P_2(w)\}$

— **Définition de L_2 par grammaire** : $S \rightarrow \varepsilon, S \rightarrow SS$ et $S \rightarrow aSb$ avec $L_2 = \mathcal{L}(S)$.

▷ QUESTION 1 Justifier en quoi la chaîne $aabbab$ appartient à la fois à L_1 et L_2 .

▷ QUESTION 2 On veut montrer que $L_2 \subseteq L_1$. On rappelle que ceci revient à montrer que tout mot dérivable à partir de S vérifie les propriétés P_1 et P_2 .

1. ajouter une règle de grammaire qui violerait la propriété P_2 .
2. en considérant la grammaire initiale prouvez $L_2 \subseteq L_1$.

▷ QUESTION 3 On veut maintenant montrer que $L_1 \subseteq L_2$. Pour cela on doit montrer que tout mot vérifiant les propriétés $P1$ et $P2$ peut être dérivé de l'axiome.

1. On vous propose de faire l'analyse par cas suivante : (1) $w = \varepsilon$, (2) $w = abu$, (3) $w = uab$ (4) $w = aub$, avec $u \in L_1$. Justifier en quoi cette décomposition n'est pas complète, i.e. qu'il existe des mots de L_1 qui ne peuvent être produits comme une combinaison de ces différents cas.
2. Prouvez $L_1 \subseteq L_2$.

Exercice 60 Décrire les langages de programmation

▷ QUESTION 1 Dans un langage de programmation, un *identificateur* est un nom choisi par le programmeur qui peut être utilisé pour une variable ou une fonction, par exemples « x », « toto », « fibo ». Écrire une grammaire décrivant les identificateurs Python V2 (non-terminal *Idf*) sur le vocabulaire $V_1 = \{\mathbf{a}, \dots, \mathbf{z}, \mathbf{A}, \dots, \mathbf{Z}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{9}, _ \}$ (à partir de la version 3 d'autres caractères sont permis). On rappelle qu'un identificateur ne peut jamais commencer par un chiffre.

▷ QUESTION 2 En Python l'instruction d'affectation est de la forme : $Inst \rightarrow Cible = Exp$. En partie gauche d'une affectation, on peut trouver (entre autre) les éléments suivants :

- un identificateur (ex : $x = 1$),
- l'accès à l'attribut d'un objet (ex : $o.x = 0$),
- l'accès à un élément d'une liste (ex : $l[i+1] = 0$)

Exemples : $x[y.z]$ $x.y[2]$

Soit V_2 le vocabulaire obtenu à partir de V_1 en ajoutant les symboles point (.), crochet ouvrant ([), crochet fermant (]) et virgule (,) (pour la question suivante).

Écrire une grammaire décrivant la catégorie syntaxique *Cible*. On utilisera le non-terminal *Idf* défini à la question 1 ainsi que le non-terminal *Exp* (une expression quelconque), à ne pas définir mais qui contient *Cible*.

Donner l'arbre de dérivation associé à la cible $x.y[2]$.

La grammaire proposée est-elle ambiguë ? Si oui, en donner une non-ambiguë.

▷ QUESTION 3 En fait une cible peut aussi être une liste de cibles. Cette liste doit être non vide, commence par un crochet ouvrant et finit par un crochet fermant. Les cibles sont séparées par une virgule et la dernière occurrence de cible peut, ou non, être suivie d'une virgule. Compléter la grammaire pour prendre en compte cette définition de cible.

▷ QUESTION 4 Toute cible est une expression. Il existe par contre des expressions qui ne sont pas des cibles (ne peuvent apparaître en partie gauche d'affectation). Donner des exemples d'expression qui ne sont pas des cibles.

Exercice 61 [A savoir faire] Conversion entre grammaire régulière et automate

Soit la grammaire $G = (\{a, b, c\}, \{S, A, B, C\}, S, R)$ où R contient les règles suivantes :

$$\begin{array}{ll} S \rightarrow aS \mid aA \mid cB & B \rightarrow bB \mid bC \mid \varepsilon \\ A \rightarrow B \mid bS & C \rightarrow bC \mid \varepsilon \end{array}$$

Construire un automate déterministe reconnaissant $\mathcal{L}(G)$.