Théorie des Langages 1

Cours 3 : ε-transitions + déterminisation

L. Rieg

Grenoble INP - Ensimag, 1re année

Année 2022-2023

Une propriété

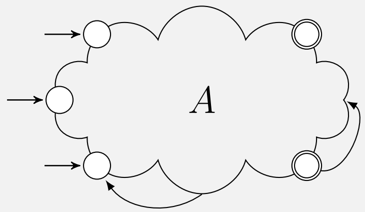
Proposition

Pour tout automate fini A, il existe un automate fini B avec :

- *un unique état initial sans transition entrante,*
- *un unique état final sans transition sortante,*

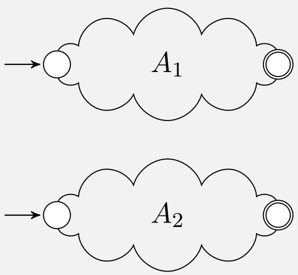
équivalent à A.

Construction :



Union

Etant donnés deux automates A_1 et A_2, construire un automate reconnaissant $\mathcal{L}(A_1) \cup \mathcal{L}(A_2)$.



Formellement :
Si $A_1 = (Q_1, V, \delta_1, I_1, F_1)$ et $A_2 = (Q_2, V, \delta_2, I_2, F_2)$, on a :

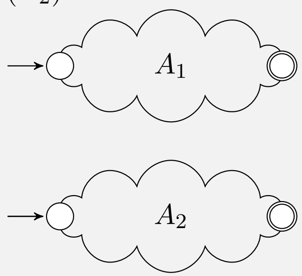
$$A_1 \cup A_2 \stackrel{\text{def}}{=}$$

avec

$$\delta \stackrel{\text{def}}{=}$$

Concaténation

Etant donnés deux automates A_1 et A_2, construire un automate reconnaissant $\mathcal{L}(A_1)).\mathcal{L}(A_2)$.



Exercice : écrire formellement cette transformation

Si $A_1 = (Q_1, V, \delta_1, I_1, F_1)$ et $A_2 = (Q_2, V, \delta_2, I_2, F_2)$, on a :

Comment montrer que cette définition est correcte ?

On pose $A_1.A_2 \stackrel{\text{def}}{=} (Q_1 \uplus Q_2, V, \delta, I_1, F_2)$

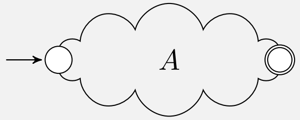
$\delta \stackrel{\text{def}}{=} \delta_1 \cup \delta_2 \cup \{(f, \varepsilon, i) \mid f \in F_1, i \in I_2\}$

Montrer que $\mathcal{L}(A_1.A_2) = \mathcal{L}(A_1).\mathcal{L}(A_2)$.

Exercice : faire de même pour l'union $A_1 \cup A_2$.

Concaténation itérée

Etant donné un automate A, construire un automate reconnaissant $\mathcal{L}(A)^*$.



Résumé

Théorème

La classe des langages réguliers est fermée :

- *par union*
- *par concaténation*
- *par concaténation itérée*

Nous en verrons d'autres au cours 7.

Question

Peut-on toujours effectuer les transformations

?

Dans la suite : techniques de transformation, preuves plus tard

Algorithme de suppression des ε-transitions

Deux étapes :

1. Déterminer les états qu'on peut atteindre en ne se servant que d'ε-transitions
2. Se servir de cette information pour construire un automate équivalent sans ε-transition

Etape 1

Définition (États accessibles)

Etant donné un automate $A = \langle Q, V, \delta, I, F\rangle$, on définit par induction pour tout $p \in Q$ l'ensemble $\mathrm{Acc}_\varepsilon(p)$ des états accessibles depuis p par ε-transitions :

Calcul de $\mathrm{Acc}_\varepsilon(p)$ par (cf cours 1)

Rappel sur le calcul par itération pour $\mathrm{Acc}_\varepsilon(p)$

Idée : Calculer les états de $\mathrm{Acc}_\varepsilon(p)$ accessibles en au plus n pas et faire croître n.

$\mathrm{Acc}_\varepsilon(p) = \bigcup_{n\geq 0} A_n$, où la suite (A_n) est définie par :

algorithme $\mathrm{Acc}_\varepsilon(p) =$
  $n \leftarrow 0,\ A_0 \leftarrow \{p\}$
  répéter
    $A_{n+1} \leftarrow A_n \cup \{\kappa_i(e_1,\ldots,e_{k_i}) \mid \kappa_i \in K, e_1,\ldots,e_{k_i} \in A_n\}$
    $n \leftarrow n+1$
  jusqu'à $A_{n+1} = A_n$
  renvoyer A_n

Question : Est-ce que ça termine toujours ?

Au besoin, on fait un tableau des A_n jusqu'à stabiliser.

Algorithme de suppression des ε-transitions (suite)

Etape 2.

Définition

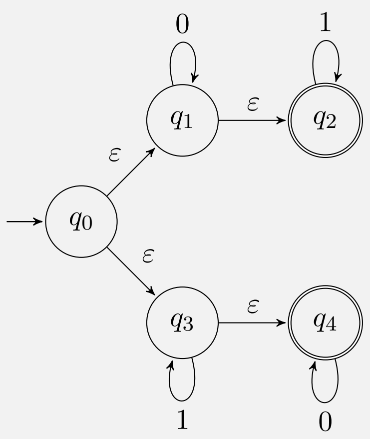
Etant donné un automate $A = \langle Q, V, \delta, I, F\rangle$, on définit l'automate $B = \langle Q, V, \delta', I, F'\rangle$ de la façon suivante :

Propositions

- B est un automate sans ε-transition.
- B est équivalent à A. démo plus tard

Exercice

Construire B pour l'automate A suivant :



Exercice (solution)

Rappels sur les AFD complets

Définition (Automate déterministe complet)

Un AF $\langle Q, V, \delta, I, F\rangle$ est dit déterministe complet si

1. Card$(I) = 1$ (exactement un état intial)
2. $\nexists\,(q, \varepsilon, p) \in \delta$
3. $\forall (q, a) \in Q \times V, \exists! p \in Q, (q, a, p) \in \delta$.

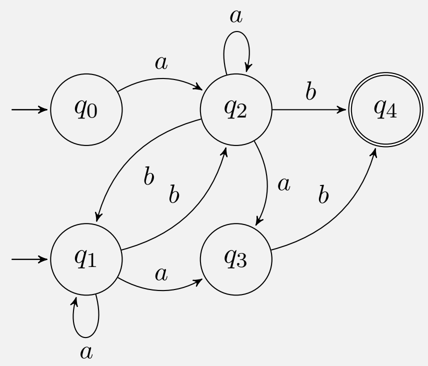
Conséquences

-
-
-
-

Principe de la déterminisation

Idée : suivre tous les chemins en parallèle

Exemple : L'automate suivant reconnaît-il aab ?



Définition

Définition (Automate des parties)

Etant donné un automate $A = \langle Q, V, \delta_A, I, F_A\rangle$ sans ε-transition, on construit l'automate $B = \langle \mathcal{P}(Q), V, \delta_B, \{I\}, F_B\rangle$, où :

- δ_B est défini par
$$\forall P \subseteq Q, \forall a \in V,\ \delta_B(P, a) = \{q \in Q \mid \exists p \in P : (p, a, q) \in \delta_A\}$$
- $F_B = \{P \subseteq Q \mid P \cap F_A \neq \emptyset\}$

Remarques

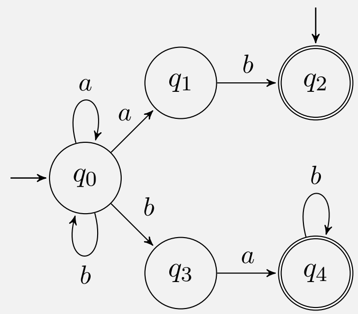
- $P \subseteq Q \iff P \in \mathcal{P}(Q)$ *et* $\emptyset \subseteq Q$ *: un état puits de* B
- *Certains* $P \subseteq Q$ *peuvent ne pas être accessibles depuis* I *donc on construit* B *de proche en proche à partir de* I.

Proposition

L'automate B *est un automate fini déterministe complet équivalent à* A.

Exemple

Construire un AFD (complet) équivalent à :



7 états accessibles (sur 32 potentiels)
5 états acceptants accessibles (sur 24 potentiels)