Théorie des Langages 1

Cours 5 : Preuves, implémentation et applications

L. Rieg

Grenoble INP - Ensimag, 1re année

Année 2024-2025

Notes

Rappels sur l'élimination des ε-transistions

1. Calculer $\mathrm{Acc}_\varepsilon(p)$, les états accessibles par ε-transistions
   $\rightsquigarrow$ par itération (cf. cours 1)
2. Construire un automate B équivalent sans ε-transition

$$p \xrightarrow[\boxed{B}]{a} q \iff \exists\, r,\ p \overset{\varepsilon}{\underset{\boxed{A}}{\rightsquigarrow}} r \xrightarrow[\boxed{A}]{a} q$$

Remarques

- *Même Q, V et I, seuls δ et F changent*
- *Par construction, B est sans ε-transition*

Notes

Correction de l'élimination des ε-transistions

Théorème

$\forall$ *automate* A*, l'automate* B *défini précédemment est équivalent à* A.

Lemme intermédiaire : caractérisation des chemins

L'automate B vérifie la propriété suivante :

Il existe un chemin de p à q de trace w dans A
si et seulement si
il existe $r \in Q$ tel qu'il existe un chemin de p à r de trace w dans B
et un chemin de r à q de trace ε dans A.

Graphiquement : $\underset{\boxed{A}}{p \overset{w}{\rightsquigarrow} q} \iff \exists r, \underset{\boxed{B}}{p \overset{w}{\rightsquigarrow} r}$ et $\underset{\boxed{A}}{r \overset{\varepsilon}{\rightsquigarrow} q}$

Preuve par induction sur w.

- Base : $w = \varepsilon$. Il suffit de prendre $r \overset{\text{def}}{=} p$.

Notes

Preuve par induction, suite

- Induction : $w = aw' \quad (a \in V)$

$$\underset{\boxed{A}}{p \overset{aw'}{\rightsquigarrow} q} \iff \underset{\boxed{A}}{p \overset{a}{\rightsquigarrow} u \overset{w'}{\rightsquigarrow} q}$$

$$\iff \underset{\boxed{A}}{p \overset{\varepsilon}{\rightsquigarrow} v \overset{a}{\longrightarrow} s \overset{\varepsilon}{\rightsquigarrow} u \overset{w'}{\rightsquigarrow} q}$$

$$\iff \underset{\boxed{B}}{p \overset{a}{\longrightarrow} s} \text{ et } \underset{\boxed{A}}{s \overset{w'}{\rightsquigarrow} q}$$

$$\overset{\text{Hyp. Ind.}}{\iff} \underset{\boxed{B}}{p \overset{a}{\longrightarrow} s} \text{ et } \underset{\boxed{B}}{s \overset{w'}{\rightsquigarrow} r} \text{ et } \underset{\boxed{A}}{r \overset{\varepsilon}{\rightsquigarrow} q}$$

$$\iff \underset{\boxed{B}}{p \overset{aw'}{\rightsquigarrow} r} \text{ et } \underset{\boxed{A}}{r \overset{\varepsilon}{\rightsquigarrow} q}$$

Notes

Preuve du théorème

Notes

Rappels sur la déterminisation

Idée : suivre tous les chemins en parallèle

- Entrée : un automate $A = \langle Q, V, \delta_A, I, F_A \rangle$ sans ε-transistions
- Sortie : un automate B déterministe complet équivalent à A

Définition (Automate des parties)

Etant donné un automate $A = \langle Q, V, \delta_A, I, F_A \rangle$ sans ε-transition, on construit l'automate $B = \langle \mathcal{P}(Q), V, \delta_B, \{I\}, F_B \rangle$, où :

- δ_B est défini par

$$\forall P \subseteq Q, \forall a \in V,\ \delta_B(P, a) = \{q \in Q \mid \exists p \in P : (p, a, q) \in \delta_A\}$$

- $F_B = \{P \subseteq Q \mid P \cap F_A \neq \emptyset\}$

Notes

Propriété (caractérisation des chemins)

Proposition

Pour tout $w \in V^*$ *et pour tout* $P \subseteq Q$*, on a*
$\delta_B^*(P, w) = \{q \in Q \mid \exists p \in P, \exists$ *un chemin dans* A *de* p *à* q *de trace* $w\}$.

Preuve : par induction sur w

- $w = \varepsilon$:

Notes

Propriété (caractérisation des chemins)

Proposition

Pour tout $w \in V^*$ *et pour tout* $P \subseteq Q$*, on a*
$\delta_B^*(P, w) = \{q \in Q \mid \exists p \in P, \exists$ *un chemin dans* A *de* p *à* q *de trace* $w\}$.

Preuve : par induction sur w

- $w = aw'$:

Notes

Correction de la déterminisation

Théorème

L'automate B est équivalent à A.

Preuve :

Notes

Implémentation des automates

Notes

Pour les AFD complets

AFD = cas facile

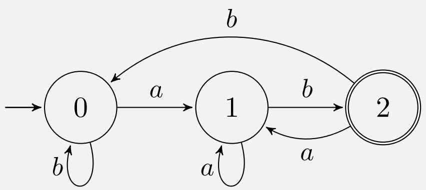
- jamais de choix à faire (déterminisme)
- toujours défini (complétude)

$\leadsto$ existence + unicité du chemin
$\leadsto$ important pour définir l'état d'un système (cf cours d'architecture)

3 méthodes :

-
-
-

Exemple filé : $L = V^*.\{ab\}$



Notes

Interface

Comment est représenté le mot ?

- par une (tout est connu d'un coup)
- par une (arrivée au compte-goutte)

```
# initialisation de la source
init_input(...)

# acces au caractere suivant
next_char()
```

Exemples

```
import sys
in_stream = sys.stderr

def init_input():
    global in_stream = sys.stdin

def next_char():
    global in_stream
    return in_stream.read(1)
```

```
word = ""
index = 0

def init_input(w):
    global word = w
    global index = -1

def next_char():
    global index+=1
    return global word[index]
```


Notes

Automates et fin de mot

```
def exec():
    state = i
    init_input()
    ch = next_char()
    while ???:
        state = step(state, ch)
        ch = next_char()
    return state ∈ accepting
```

avec :

- i l'état initial
- step la fonction de transition
- accepting les états acceptants

Comment reconnaître la fin du mot ?

- Connaître la taille du mot (exemple : chaînes Python, OCaml)
  $\leadsto$ possible uniquement si toute l'entrée est disponible à la fois
- Ajouter un caractère spécial $\notin V$ de fin de mot ('\0', EOL/EOF)
  $\leadsto$ marche dans tous les cas (transmission sur réseau)

Ici, on choisit d'ajouter un caractère spécial $ (ou END)

Notes

Implémentation par table ou par tests

Par table

Idée :

```
def A = {0: {'a': 1, 'b': 0},
         1: {'a': 1, 'b': 2},
         2: {'a': 1, 'b': 0}}

def step(state, ch):
    return A.transitions[state][ch]
```

$\leadsto$ l'automate est une donnée

Coût = lecture mémoire

Par tests

Idée :

```
def step(state, ch):
    if state == 0:
        if ch == 'a':
            return 1
        elif ch == 'b':
            return 0
    elif state == 1:
        ⋮
```

$\leadsto$ l'automate est un programme

Coût = tests + sauts

Notes

Implémentation par fonctions

Idée :

$\rightsquigarrow$ pas de boucle **while** ni de fonction step

```
def state0():
    ch = next_char()
    if ch == 'a':
        return state1()
    elif ch == 'b':
        return state0()
    elif ch == '$':
        return False
```

```
def state1():
    ch = next_char()
    if ch == 'a':
        return state1()
    elif ch == 'b':
        return state2()
    elif ch == '$':
        return False
```

```
def state2():
    ch = next_char()
    if ch == 'a':
        return state1()
    elif ch == 'b':
        return state0()
    elif ch == '$':
        return True
```

- plus modulaire que la boucle while
- permet de faire du calcul
- Coût = appel de fonction

automate = ensemble de fonctions
lecture = appeler l'état initial
état courant = la fonction qui s'exécute

```
def exec_v2():
    init_input()
    return state0()
```


Notes

Quelle méthode pour les AFND ?

- Par fonction
  une fonction est spécifique à un état...
  Exponentiel avec plusieurs états ! (nb de chemins)
- Par matrice ou tests
  variable state = ensemble d'états
  + itération sur state pour calculer l'état suivant
  $\rightsquigarrow$ deux variables : state, new_state
  $\rightsquigarrow$ boucles sur state paralléliser les tests / lectures mémoire

```
def step(A, state, ch):
    new_state = set.empty()
    for q in state:
        new_state.add(
            A.transitions[
                q, ch])
    return new_state
```

```
def exec(A):
    state = A.init
    init_input()
    ch = next_char()
    while (ch != '$'):
        state = step(A, state, ch)
        ch = next_char()
    return A.accepting.inter(state)
```


Notes

Comparaison AFD/AFND

AFD

- exécution très rapide $O(|w|)$ (jamais de choix à faire)
- plus gros que AFND (exponentiellement !)

Cas d'utilisation

- Vitesse exigée
- Beaucoup d'utilisation
- Construction de l'automate à l'avance

$\rightsquigarrow$ ex : compilateur

AFND

- exécution plus lente $O(|w| \cdot |Q|)$ (ensembles d'états)
- plus compacts que AFD

Cas d'utilisation

- Contraintes d'espace
- Utilisation unique (ou faible)
- Construction de l'automate à l'utilisation
- Facile dans les circuits

$\rightsquigarrow$ ex : expressions régulières

Choix AFD/AFND = compromis espace/temps

Notes

Exemple d'utilisation : analyse lexicale

Première partie d'un compilateur : reconnaître les programmes corrects

Étapes :

1. Décrire les programmes corrects — expression régulière / grammaire
2. Construire un AFND
3. Le déterminiser
4. En faire une implémentation par `sauts` (fonction)

En plus

- faire du calcul vs. OUI/NON — voir TP/projet
- gestion des erreurs (cas `else` des `if`)

En TP : reconnaissance des constantes flottantes en Python

Notes

Application des automates

Notes

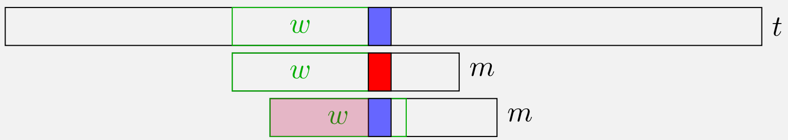
Application 1 : algo KMP

Contexte : recherche d'un motif m dans un texte t

Contraintes :

- construction de l'automate linéaire (en $|m|$)
- parcours du texte en ligne = caractère par caractère
  pas de retour en arrière possible
  Complexité linéaire en $|t|$

Idée : décaler le motif de « juste ce qu'il faut » en cas d'erreur
sans rater d'occurence de m



Que peut-on dire de par rapport à w ?

Notes

Calcul des bords d'un mot

Définition (Bord)

Le bord d'un mot $w \neq \varepsilon$ est son plus grand préfixe strict qui en est également un suffixe. On le note $\varphi(w)$.

Pourquoi strict ?

Calcul de $\varphi(w)$

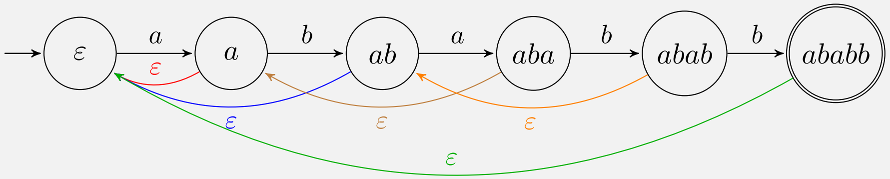
- pour $a \in V$, $\varphi(a) = ?$
- pour $w \in V^+, a \in V$, $\varphi(wa) = ?$

Idée : si problème après w, réessayer avec $\varphi(w)$!

Notes

Exemple : recherche de $ababb$

Recherche de $m = ababb$ dans $t = abaababb$.



Calcul de $\varphi(w)$ pour w préfixe de m :

$\varphi(a) =$ $\varphi(ab) =$

$\varphi(aba) =$ $\varphi(abab) =$

$\varphi(ababb) =$

Complexité de la construction :

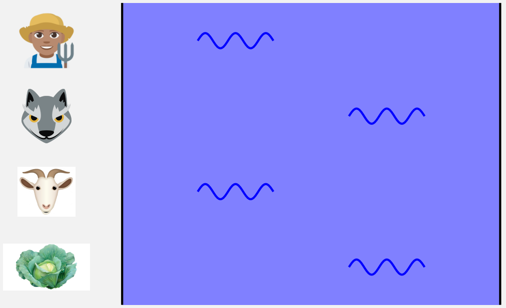
Taille de l'AFD complet :

Complexité de la lecture :

Notes

Application 2 : statégie dans un jeu

Jeu du fermier (cf. exercice 14 du recueil de TD)



Exercice

1. Représenter le problème par un automate, en précisant le vocabulaire choisi.
2. Comment déterminer une stratégie à partir de l'automate ?
   Quelles sont les stratégies optimales ?

Notes

Solution

Notes