

Automates finis

Durée : 2h. Tous documents autorisés. Barème indicatif sur 20 points. Ne justifiez vos réponses que si explicitement demandé. Les exercices sont indépendants 2 à 2. N'hésitez pas à admettre une question pour répondre aux suivantes (lorsque c'est possible).

▷ **Exercice 1 (8 points) :**

Soit L l'ensemble des mots sur le vocabulaire $\{0, 1\}$ qui ne contiennent pas deux 1 consécutifs.

- 1) Donner une expression régulière qui engendre le langage L .
- 2) En déduire l'automate **déterministe complet minimal** qui reconnaît L en donnant les grandes étapes de l'algorithme que vous appliquez.
- 3) En déduire un automate qui reconnaît $\bar{L}$, le complémentaire de L , en donnant les grandes étapes de l'algorithme que vous appliquez.
- 4) En déduire une expression régulière qui engendre $\bar{L}$, en donnant les grandes étapes de l'algorithme que vous appliquez.
- 5) Quel lien y-a-t-il entre L et l'expression régulière $(0 + 1)^*11$? Justifier votre réponse grâce à un calcul sur des systèmes réguliers d'équations.

▷ **Exercice 2 (6 points) :**

On considère ci-dessous des langages L_1 et L_2 sur le vocabulaire $V = \{a, b, c, d\}$.

- 1) En appliquant le **lemme de l'étoile**, montrez que $L_1 = \{a^n.b^{2n} \mid n \geq 1\}$ n'est pas régulier.
- 2) Soit $L_2 = \{w_1.w_2.w_3 \mid w_1 \in \{c, d\}^*, w_2 \in \{a, d\}^*, w_3 \in \{b, c\}^*, |w_1| = |w_2| = |w_3|\}$. **Sans utiliser** le lemme de l'étoile, mais **en admettant que L_1 n'est pas régulier**, montrer que L_2 n'est pas régulier.

▷ **Exercice 3 (6 points) :**

Soient V_1 et V_2 les vocabulaires respectifs $\{a, b\}$ et $\{0, 1\}$. On considère la fonction $f \in V_1^* \rightarrow V_2^*$ implémentée par le programme `f` PYTHON ci-contre (qui encode les mots dans des chaînes de caractères).

- 1) Dessiner une machine de Mealy (transducteur) qui étant donné un mot $w \in V_1^*$ produit le mot $f(w)$ de V_2^* . Attention, on ne demande ici de représenter le flot de contrôle du programme `f`, mais de modéliser la fonction de traduction f .

- 2) Donner l'automate fini obtenu en ne conservant que les sorties sur les transitions de la machine de Mealy précédentes (c'est-à-dire en effaçant les entrées).

- 3) En déduire une expression régulière qui engendre $f(V_1^*)$ c'est-à-dire $\{f(w) \mid w \in V_1^*\}$. Justifier vis-à-vis de l'automate précédent.

```
def f(w):
    if len(w) <= 1:
        return ""
    last = w[0]
    res = ""
    for x in w[1:]:
        if x == last:
            continue
        last = x
        res += ('0' if x=='a' else '1')
    return res
```